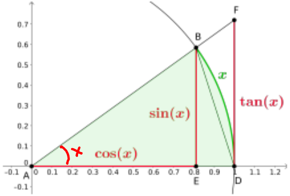
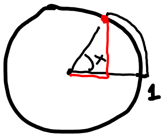
Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\frac{\sin x}{x} = 1$$

Πρώτα χρειαζόμαστε το πολύ χρήσιμο όριο: $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$.



$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$



$$\underbrace{\text{Εμβαδό τριγώνου } ABE}_{\frac{1}{2}\cos x\sin x} \le \underbrace{\text{Εμβαδό κυκλικού τομέα } ABD}_{\pi\frac{x}{2\pi}} \le \underbrace{\text{Εμβαδό τριγώνου } AFD}_{\frac{1}{2}\tan x}$$

$$\le \qquad \pi\frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2} \qquad \le \qquad \frac{1}{2}\tan x = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$$

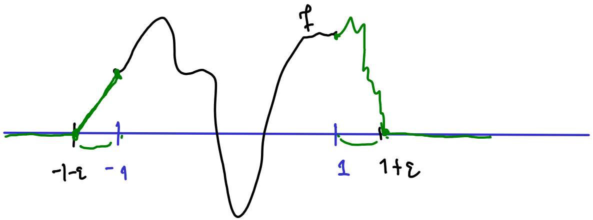
Διαιρώντας δια $\sin x/2$ παίρνουμε: $\cos x \le \dfrac{x}{\sin x} \le \dfrac{1}{\cos x}$

$$\downarrow 1 \qquad \downarrow 1 \qquad \downarrow 1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

4. Αν $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, συνεχής, τέτοια ώστε (α) $F(x) = f(x)$ για $x \in [-1,1]$ και (β) $F(x) = 0$ αν $x \leq -1-\epsilon$ ή $x \geq 1+\epsilon$.

F επέκταση της f



3. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ και $f(x_0) > 0$ δείξτε ότι υπάρχουν $\epsilon, \delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ τότε $f(x) \geq \epsilon$.

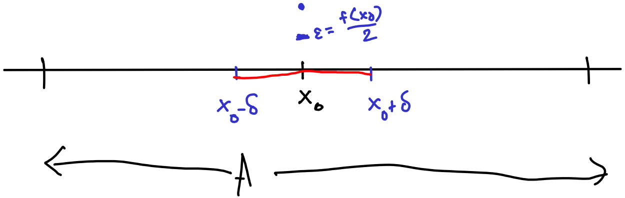
$f(x) > \varepsilon \implies f(x) \geq \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ τ.ώ.

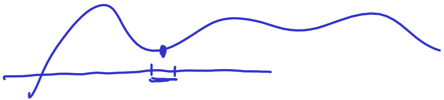
$\boxed{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$x \neq x_0$



$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$

$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0) < f(x)} < \frac{3}{2} f(x_0)$



Αν $f(x), g(x) : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ είναι δύο συναρτήσεις γράφουμε

$$f(x) = O(g(x)) \text{ για } x \to +\infty$$

αν υπάρχουν $M, C > 0$ τέτοια ώστε

$$x \geq M \implies f(x) \leq Cg(x).$$

Με άλλα λόγια $f(x) = O(g(x))$ σημαίνει ότι το πηλίκο $\frac{f(x)}{g(x)}$ είναι τελικά φραγμένο.

Ποια από τα παρακάτω είναι σωστά;

$1 + x^2 \leq C \cdot x$

- [ ] 1. $\overbrace{\cancel{1} + x^2} = \overbrace{O(x)}$ για $x \to +\infty$
- [ ] 2. $\boxed{2x+1} = O(3x)$ για $x \to +\infty$ √
- [ ] 3. $2x^2 + 1 = O(3x^2 + 2x + 1)$ για $x \to +\infty$
- [ ] 4. $x \sin^2 x = O(x)$ για $x \to +\infty$

$+\infty \leftarrow \frac{1+x^2}{x} \leq C$

$2x + 1 \leq C \cdot 3x$ για αρκετά μεγάλο x

$2x+1 \leq 3x \iff 1 \leq x$

A, B

$A = O(B)$

$A = o(B)$

$A = O(B)$

$A \leq C B$ σταθερά

αρκεί να είναι κοντά στο όριο

$A = o(B)$

$\frac{A}{B} \to 0$

$f(x) = o(g(x))$ όταν $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$3x+1 = \underline{\underline{O}}(x)$$

$$3x+1 \leq C \cdot x$$

$$C = 4 \quad (x \geq 1)$$

$$100 \cdot x \sin^2 x = O(x) \qquad \underline{\underline{x \to +\infty}}$$

$$\wedge|$$

$$\underline{100} \cdot x$$

✓

$$\underline{12x^2+1} = O(\underline{13x^2 + 2x + 1})$$

$$\frac{2x^2+1}{3x^2+2x+1} \; r \longrightarrow \frac{2}{3}$$

$$\exists M > 0 : \underline{x \geq M} \Longrightarrow 1 \geq r \geq \frac{1}{3}$$

$$\frac{2x^2+1}{3x^2+2x+1} \leq 1$$

$$\underline{2x^2+1} \leq 3x^2 + 2x + 1$$

$x \to 0^+$ ισχύει $\frac{1}{x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$\exists\, \delta > 0 \quad 0 < x < \delta \implies \frac{1}{x} \leq C \frac{1}{x^2}$

$1 \leq \frac{C}{x}$

$x \leq C$

αν $x \to +\infty$ δεν ισχύει $\boxed{\frac{1}{x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

$\underline{\underline{x}} = \frac{1/x}{1/x^2}$ φραγμένο

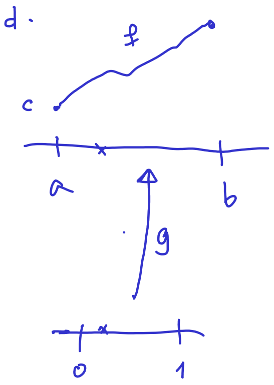
Σωστό ή λάθος;

f^{-1} συνεχής

Αν $f : [a,b] \to [c,d]$ είναι $\boxed{\text{συνεχής, γνησίως αύξουσα}}$ και $f(a) = c, f(b) = d$, και $g : [0,1] \to [a,b]$ τότε αν η σύνθεση

$$f(g(x)) \ : [0,1] \to [c,d]$$

είναι συνεχής έπεται ότι και η g είναι συνεχής στο $[0,1]$.



$$f^{-1}(f(g(x))) = g(x)$$

συνεχής

$$f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x))$$

Αντίστροφη συνάρτηση

$f(x_{n_{k_\ell}}) \to f(x') \not< f(x) = y$

↳ υπακ. της $f(x_n) = y_n$

1−1

$x \xrightarrow{f} y$

$x \xleftarrow{f^{-1}} y$

$\boxed{\begin{array}{l} y_n \to y \\ f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y) \end{array}}$

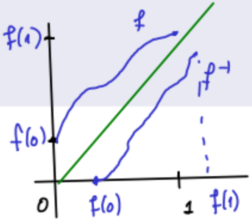
Θεώρημα

Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και γνήσια αύξουσα εκεί τότε η αντίστροφη συνάρτηση

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$$

είναι επίσης συνεχής στο $[f(a), f(b)]$.

$f(a) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ $f(b) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$



$y_n \in [f(a), f(b)]$, $y_n \to y \in [f(a), f(b)]$

$\Rightarrow f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$

$\boxed{y_n = f(x_n)}$

$\boxed{y = f(x)}$

$f^{-1}(f(x_n)) \to f^{-1}(f(x))$

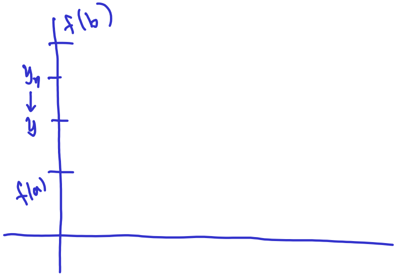
$x_n \to x$ ✓

Έστω $x_n \not\to x$. $\exists\, \varepsilon > 0$ $|x_{n_k} - x| > \varepsilon$ $\forall k$

Για άπειρα k: $x_{n_k} \le x - \varepsilon$.

Υπάρχει υπακ. της x_{n_k}, $x_{n_{k_\ell}}$ τ.ώ.

$x_{n_{k_\ell}} \xrightarrow{\ell} x' \le x - \varepsilon$ ★



$$f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y) \Longleftarrow \underline{\underline{y_n \to y}}$$

$$y_n, y \in [f(a), f(b)]$$

Θ. ενδ. τιμών

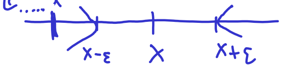
$$y_n = f(x_n), \quad y = f(x)$$

$$f^{-1}(f(x_n)) \to f^{-1}(f(x))$$

$$x_n \to x$$

$x_n \not\to x$ $\qquad \forall \varepsilon\ \exists n_0 : \ n \cancel{\geq} n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$

$$\exists \varepsilon > 0 \ \underbrace{\forall n_0 \ \exists n \geq n_0}_{\text{υπάρχουν άπειρα } n} \ \text{τ.ώ.} \ |x_n - x| \geq \varepsilon$$



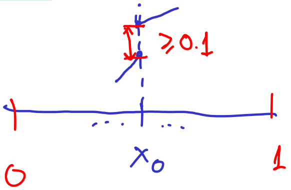
$x_n \in [a,b] \Rightarrow$ έχουν συγκλίνουσα υπακ.

$x_n \leq x - \varepsilon$ $\qquad x' = \lim x_n \leq x - \varepsilon \Rightarrow \overset{y}{\overbrace{f(x')}} \leq f(x-\varepsilon) < f(x) \text{"} y \text{"}$

$1 \quad \frac{1}{2} \quad 2 \quad \frac{1}{3} \quad 3 \quad \frac{1}{4} \quad 4 \quad \frac{1}{5} \quad \frac{5}{} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{6}{}$

Η $f : [0,1] \to [0,1]$ είναι αύξουσα και ικανοποιεί $f(0) = 0,\ f(1) = 1$.

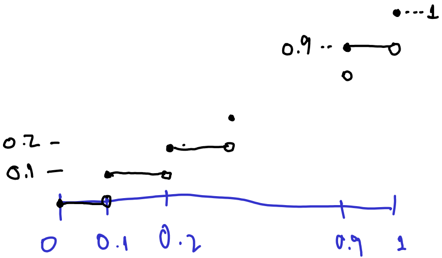
Πόσα το πολύ σημεία μπορούν να υπάρχουν στο $[0,1]$ στα οποία η f να παρουσιάζει ασυνέχεια άλματος με το άλμα (διαφορά των πλευρικών ορίων στο σημείο) να είναι ≥ 0.1;



$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \geq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

$$>$$

$$\text{άλμα} = \lim_{x \to x_0^+} f - \lim_{x \to x_0^-} f$$



5. (a) Δείξτε ότι η συνάρτηση του Dirichlet

$\mathbb{Q}^c, \mathbb{Q}$ πυκνό σύνολο στο $\mathbb{R}$ $\implies$ πουθενά συνεχής

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός αριθμός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος αριθμός} \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής πουθενά.

(b) Κατασκευάστε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να είναι συνεχής μόνο στο 0.

$x \in \mathbb{Q}$: $x_n \to x$, $x_n \notin \mathbb{Q}^c$

$D(x_n) \not\to D(x)$, $D(x_n) = 0$, $D(x) = 1$

$x \in \mathbb{Q}^c$: $x_n \to x$, $x_n \in \mathbb{Q}$

$D(x_n) \not\to D(x)$, $D(x_n) = 1$, $D(x) = 0$

$f(x) = x \cdot D(x)$

συνεχής στο 0

$x_n \to 0 \implies f(x_n) \to f(0) = 0$

$$0 \le x_n D(x_n) \le x_n$$

$0 \to 0$, $x_n D(x_n) \to 0$, $x_n \to 0$

$x \neq 0$ δεν είναι συν. εκεί

$x \in \mathbb{Q}$: $x_n \to x$, $x_n \in \mathbb{Q}^c$

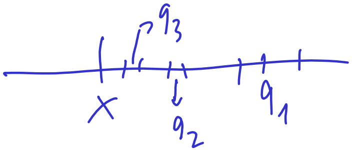
$f(x_n) = x_n D(x_n) = 0$

$f(x) = x D(x) = x$ $\neq$

$x \in \mathbb{Q}^c$: $x_n \to x$, $x_n \in \mathbb{Q}$

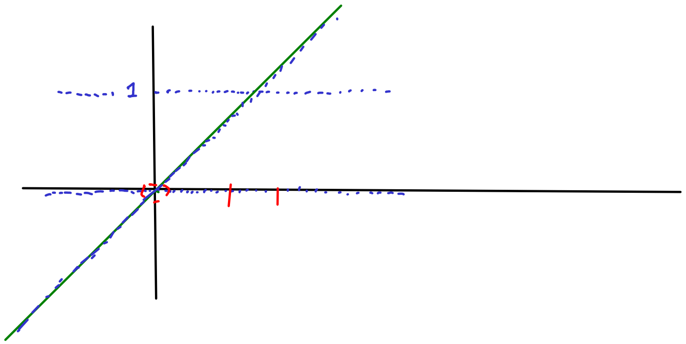
$f(x_n) = x_n D(x_n) = x_n \to x$

$f(x) = 0 \neq x$



$f(x) = x\,D(x)$

$D(x)$



6.5.12. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο ξ.

(i) Αποδείξτε ότι $n\left(f(\xi+\frac{1}{n})+f(\xi+\frac{2}{n})+\cdots+f(\xi+\frac{k}{n})-kf(\xi)\right)\to\frac{k(k+1)}{2}f'(\xi)$.

(ii) Αποδείξτε ότι $f(\xi+\frac{1}{n^2})+f(\xi+\frac{2}{n^2})+\cdots+f(\xi+\frac{n}{n^2})-nf(\xi)\to\frac{1}{2}f'(\xi)$.

$$f'(\xi)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$h_n=\frac{1}{n}$$

$$n\left(f(\xi+\tfrac{1}{n})+f(\xi+\tfrac{2}{n})+\dots+f(\xi+\tfrac{k}{n})-\underline{\underline{k}}\,f(\xi)\right)=$$

$$=\frac{f(\xi+\frac{1}{n})-f(\xi)}{1/n}+2\,\frac{\left(f(\xi+\frac{2}{n})-f(\xi)\right)}{2/n}+\dots+\frac{\left(f(\xi+\frac{k}{n})-f(\xi)\right)}{1/n}$$

$\to f'(\xi)$

$\to f'(\xi)$ $\qquad \to 2f'(\xi)$ $\qquad \to 3f'(\xi)$ $\qquad \to kf'(\xi)$

$$\longrightarrow (1+2+3+\dots+k)\,f'(\xi)=\frac{k(k+1)}{2}\,f'(\xi)$$

Η ακτίνα ενός κυκλικού δίσκου με κέντρο το 0 είναι ίση με το χρόνο t, για $0 \leq t \leq 2$.

Για οποιαδήποτε δύο χρονικές στιγμές $t_1 < t_2$ σε αυτό το διάστημα μας δίδεται ότι η μέση αύξηση του **εμβαδού** του δίσκου αυτού από τη χρονική στιγμή t_1 στη χρονική στιγμή t_2 είναι $\leq M$.

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός M που μπορεί να παίξει αυτό το ρόλο;

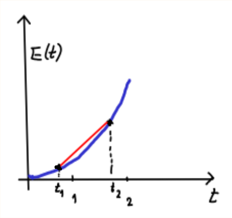
Η συνάρτηση του εμβαδού σε σχέση με το χρόνου είναι η $E(t) = \pi t^2$ σύμφωνα με την υπόθεση. Η μέση αύξηση από t_1 σε t_2 είναι το πηλίκο διαφορών

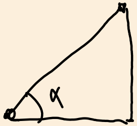
$$\underline{\underline{M}} > \frac{E(t_2) - E(t_1)}{t_2 - t_1}$$

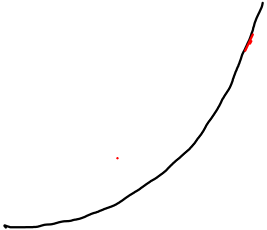
$2\pi t = E'(t)$

$2\pi 2 = 4\pi$

που είναι και η κλίση της χορδής από το σημείο $(t_1, \pi t_1^2)$ στο σημείο $(t_2, \pi t_2^2)$ όπως φαίνεται στο σχήμα:

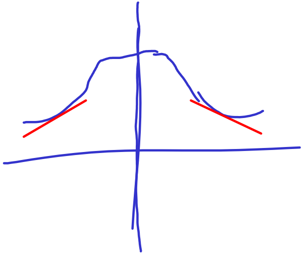






Εύκολα βλέπει κανείς ότι αν κρατήσουμε το t_2 σταθερό και κινήσουμε το t_1 προς το t_2 η κλίση της χορδής (κόκκινη γραμμή) αυξάνει, άρα η μέγιστη τιμή είναι το όριο για $t_1 \to t_2$ που είναι φυσικά η παράγωγος $E'(t_2) = 2\pi t_2$ που μεγιστοποιείται για $t_2 = 2$ με μέγιστη τιμή $4\pi = \underline{12.566370614}$.

6.5.8. Αποδείξτε ότι η παράγωγος άρτιας συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση και η παράγωγος περιττής συνάρτησης είναι άρτια συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η παράγωγος περιοδικής συνάρτησης είναι περιοδική συνάρτηση.

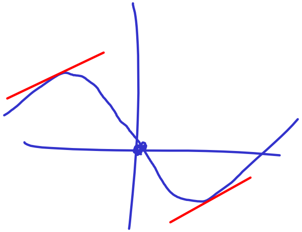


άρτια $\forall x$: $f(-x) = f(x)$

περιττή $f(-x) = -f(x)$ ✓

$(f(-x))' = (f(x))'$

$f'(-x) = -f'(x)$ περιττή



f λέγεται περιοδική με περίοδο $\underline{\underline{T > 0}}$ αν $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$$

$2\pi \qquad \sin(x+2\pi) = \sin x \qquad 4\pi, 6\pi, \ldots$

$2\pi \qquad \cos(x+2\pi) = \cos x$

$\pi \qquad |\sin x| = |\sin(x+\pi)|$

$$f(x+T) = f(x)$$

$$f'(x+T) = f'(x)$$