---

1. Υποθέτουμε ότι $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς.

(a) Αν για τον αριθμό $\ell \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε $f(x) > \ell$ δείξτε ότι υπάρχει αριθμός $c > \ell$ που να ισχύει $f(x) \ge c$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(b) Αν $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \ge g(x) + \delta$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Λύση: (a) Έστω ότι η f πιάνει το ελάχιστό της στο $x_1 \in [a, b]$. Τότε $f(x_1) > \ell$ από την υπόθεσή μας. Αν θέσουμε λοιπόν $c = f(x_1)$ τότε έχουμε το ζητούμενο.

(b) Έστω ότι η $f - g$, που είναι συνεχής, πιάνει το ελάχιστό της στο $x_2 \in [a, b]$ και ορίζουμε $\delta = f(x_2) - g(x_2) > 0$ από την υπόθεσή μας. Εύκολα βλέπουμε ότι με αυτή την επιλογή μας ισχύει το ζητούμενο.

---

2. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και δεν ισχύει $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ούτε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο, υπάρχει δηλ. $a \in \mathbb{R}$ τ.ώ. $f(a) = a$.

Λύση: Το ότι δεν ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ συνεπάγεται ότι υπάρχει μια ακολουθία $x_n \to +\infty$ τέτοια ώστε δεν ισχύει $\lim_n f(x_n) = +\infty$. Αυτό με τη σειρά του συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο $M_1 \in \mathbb{R}$ τ.ώ. $f(x_n) \le M_1$ για άπειρα n. Από την υπόθεσή μας για το όριο στο $-\infty$ προκύπτει ομοίως ότι υπάρχει $y_n \to -\infty$ και $M_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(y_n) \ge M_2$ για άπειρα n. Για ευκολία μας καλούμε αυτές τις δύο υπακολουθίες x_n και y_n (ξεχνώντας τα υπόλοιπα στοιχεία των αρχικών ακολουθιών).

Κοιτάμε τώρα τη συνεχή συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ και θέλουμε να δείξουμε ότι κάπου μηδενίζεται. Αρκεί να βρούμε δύο σημεία όπου οι τιμές της g είναι ετερόσημες. Εϋκολα βλέπουμε ότι $g(x_n) \to -\infty$ αφού η $f(x_n)$ είναι φραγμένη άνω και ομοίως βλέπουμε ότι $g(y_n) \to +\infty$ αφού η $f(y_n)$ είναι φραγμένη κάτω. Άρα για αρκετά μεγάλο n θα έχουμε $g(x_n) < 0$ και $g(y_n) > 0$ που είναι τα δύο σημεία που ψάχναμε.

---

3. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ και $f(x_0) > 0$ δείξτε ότι υπάρχουν $\epsilon, \delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ τότε $f(x) \ge \epsilon$.

Λύση: Αφού $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τ.ώ. αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει ότι

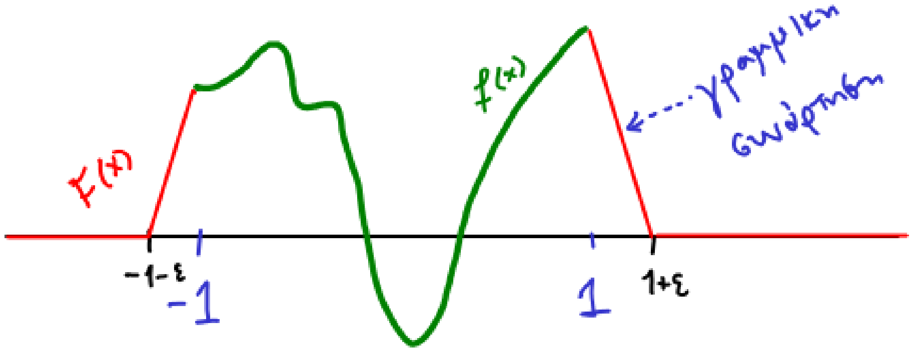
$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2},$$

ανισότητα η οποία συνεπάγεται ότι για αυτά τα x ισχύει επίσης $f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2}$, το οποίο παίρνουμε ως το ϵ που ζητάει η άσκηση.

---

4. Αν $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, συνεχής, τέτοια ώστε (α) $F(x) = f(x)$ για $x \in [-1, 1]$ και (β) $F(x) = 0$ αν $x \le -1 - \epsilon$ ή $x \ge 1 + \epsilon$.

Λύση:



Σχημα 1. Πώς επεκτείνουμε μια συνάρτηση διατηρώντας τη συνέχεια ώστε να μηδενίζεται λίγο έξω από το αρχικό διάστημα.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1 επεκτείνουμε τη συνάρτηση στο διάστημα $[1, 1+\epsilon]$ ως μια γραμμική συνάρτηση (της μορφής δηλ. $ax+b$) που το γράφημά της ενώνει με ένα ευθύγραμμό τμήμα τα σημεία $(1, f(1))$ και $(1+\epsilon, 0)$. Δεξιά από το $1+\epsilon$ την ορίζουμε να είναι 0. Η συνέχεια μέσα στο ανοιχτό διάστημα $(1, 1+\epsilon)$ είναι εξασφαλισμένη μια και εκεί μέσα η συνάρτησή μας δίνεται απλά από ένα τύπο της μορφής $F(x) = ax + b$. Στα άκρα, δηλ. στα σημεία 1 και $1+\epsilon$ ελέγχουμε εύκολα ότι τα πλευρικά όρια είναι αυτό που πρέπει. Ομοίως επεκτείνουμε προς τα αριστερά.

Προσέξτε ότι αν απλά ορίσουμε την F να είναι 0 εκτός του $[-1, 1]$ χάνουμε τη συνέχεια στα σημεία ± 1 εκτός αν τύχει η f να μηδενίζεται σε κάποιο από αυτά.

---

5. (a) Δείξτε ότι η συνάρτηση του Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός αριθμός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος αριθμός} \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής πουθενά.

(b) Κατασκευάστε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να είναι συνεχής μόνο στο 0.

Λύση: (a) Το σημαντικό σε αυτή την άσκηση είναι ότι και το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ και το σύνολο των αρρήτων αριθμών $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι αυτό που ονομάζουμε *πυκνά* σύνολα στο $\mathbb{R}$.

Ένα σύνολο λέγεται πυκνό στο $\mathbb{R}$ αν μπορούμε να βρούμε στοιχείο του σε οποιοδήποτε διάστημα θετικού μήκους, όπου και να είναι αυτό και όσο μικρό και να είναι το μήκος του.

Αν μας δώσουν ένα διάστημα $(a, a+\epsilon)$ με $a \in \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$ επιλέγουμε ένα φυσικό αριθμό $n > 1/\epsilon$ και παρατηρούμε ότι κάποιο πολλαπλάσιο του $1/n$, ας το πούμε k/n με $k \in \mathbb{Z}$, θα ανήκει στο διάστημα $(a, a+\epsilon)$. Ο λόγος είναι ότι το μήκος του διαστήματος είναι μεγαλύτερο από $1/n$ που είναι η απόσταση ανάμεσα σε διαδοχικά πολλαπλάσια του $1/n$. Βρήκαμε έτσι ένα ρητό αριθμό $q = k/n$ στο $(a, a+\epsilon)$. Για να βρούμε ένα άρρητο αριθμό παίρνουμε ένα αριθμό της μορφής $q + \frac{\sqrt{2}}{N}$ για αρκετά μεγάλο N, τόσο μεγάλο ώστε ο αριθμός αυτός να ανήκει στο διάστημα $(a, a+\epsilon)$, πράγμα που γίνεται αν το N είναι αρκετά μεγάλο αφού ο αριθμός q έχει *θετική* απόσταση από τα δύο άκρα του διαστήματος. Εύκολα βλέπουμε ότι ένας τέτοιος αριθμός είναι αναγκαστικά άρρητος (αν δεν ήταν θα μπορούσαμε, λύνοντας ως προς το $\sqrt{2}$, να δείξουμε ότι το $\sqrt{2}$ είναι ρητός, που δεν είναι).

Αν τώρα πάρουμε οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}$ παρατηρούμε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν στο διάστημα $(x-\delta, x+\delta)$ και ρητοί και άρρητοι αριθμοί, δηλ. η D παίρνει και τιμή 1 και τιμή 0. Αυτό συνεπάγεται ότι το όριο της D στο x δεν υπάρχει, άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε κανένα x.

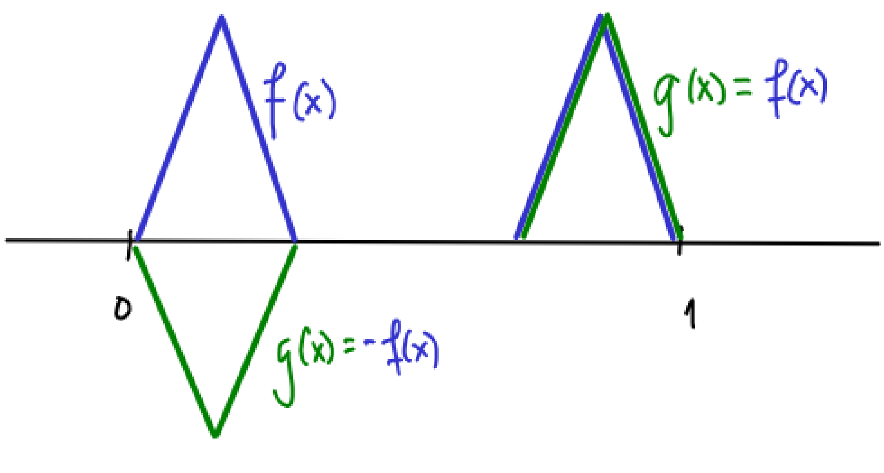
(b) Πάρτε $f(x) = xD(x)$. Σε οποιοδήποτε $x \neq 0$ μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή δεν είναι συνεχής (αν ήταν τότε και η $D(x) = f(x)/x$ θα ήταν εκεί συνεχής, που ξέρουμε από το (a) ότι δεν είναι). Στο 0 η f είναι συνεχής μια και $f(0) = 0$ και επίσης $|f(x)| \leq |x|$, που συνεπάγεται ότι το όριο της f στο 0 είναι 0.

---

6. (a) Αν $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει $f^2(x) = g^2(x) \neq 0$ αποδείξτε ότι είτε ισχύει για όλα τα $x \in (a, b)$ η ισότητα $f(x) = g(x)$ είτε για όλα ισχύει η ισότητα $f(x) = -g(x)$. Δείξτε ότι αυτό δεν είναι απαραίτητα σωστό αν παραλείψουμε την υπόθεση ότι οι f, g δε μηδενίζονται.

(b) Αν $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί για κάθε $x > 0$ τη σχέση $f^2(x) = x$ δείξτε ότι είτε ισχύει για κάθε $x > 0$ η ισότητα $f(x) = \sqrt{x}$ είτε για κάθε τέτοιο x ισχύει η ισότητα $f(x) = -\sqrt{x}$.

Λύση:



Σχημα 2. Οι δύο συνεχείς συναρτήσεις (μπλε και πράσινη) αλλού είναι ίσες και αλλού αντίθετες.

(a) Αφού οι f, g δε μηδενίζονται πουθενά και είναι συνεχείς έπειται ότι και η συνάρτηση $h = f/g$ είναι συνεχής. Από την υπόθεσή μας $h^2(x) = 1$ για κάθε $x \in (a, b)$, δηλ. για κάθε $x \in (a, b)$ έχουμε $h(x) = \pm 1$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έπεται ότι η h είναι σταθερή 1 ή -1, που είναι ακριβώς αυτό που θέλουμε να δείξουμε.

Αν επιτρέψουμε στις f, g να μηδενίζονται αυτό δεν ισχύει. Πάρτε για παράδειγμα $(0, 1)$ και τις δύο συναρτήσεις που φαίνονται στο Σχήμα 2.

(b) Η συνάρτηση $h(x) = f(x)/\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ (αφού ο παρανομαστής είναι συνεχής και δε μηδενίζεται - η συνάρτηση $\sqrt{x}$ είναι συνεχής ως αντίστροφη της συνάρτησης x^2) και ισχύει $h^2(x) = 1$ άρα $h(x) = \pm 1$ και από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής η h πρέπει να είναι σταθερή 1 ή -1, που είναι ακριβώς το ζητούμενο.