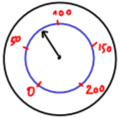
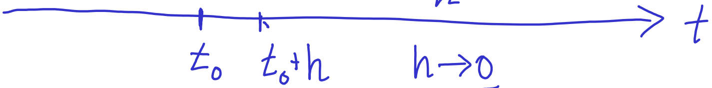
Παράγωγος μιας συνάρτησης ως ρυθμός μεταβολής



Τι είναι η ταχύτητα σε ένα επιταχυνόμενο κινητό; Συνάρτηση θέσης $f(t)$.

Μέση ταχύτητα από χρόνο a έως χρόνο b: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$$



$h \to 0$

Παράγωγος μιας συνάρτησης ως ρυθμός μεταβολής, ορισμός

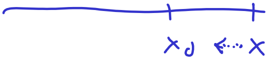
Ορισμός παραγώγου της f στο σημείο x_0: πηλίκο διαφορών

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Απαραίτητη (αλλά όχι ικανή) συνθήκη: να είναι η f συνεχής στο x_0.

Παραδείγματα:

$h'(x)=0$



$h(x) = c$ (σταθερά)

$f'(x)=a$

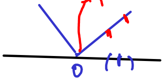
$f(x) = ax+b$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim \frac{a(x+h)+\cancel{b}-ax-\cancel{b}}{h} = \lim \frac{ah}{h} = a$$

$g(x) = x^2$

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{2hx+h^2}{h} = 2x+h \to 2x \qquad (x^2)' = 2x$$

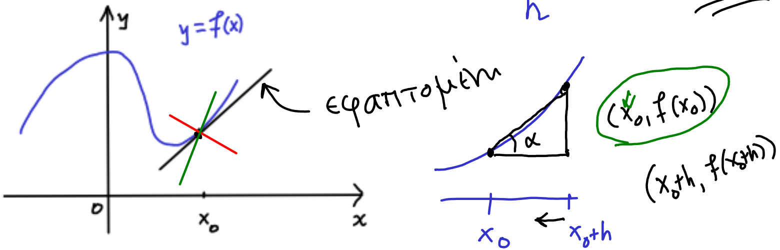
$\phi(x) = |x|$



$$\frac{|0+h|-0}{h} = \frac{|h|}{h}$$ δεν έχει όριο

Η παράγωγος ως η κλίση του γραφήματος

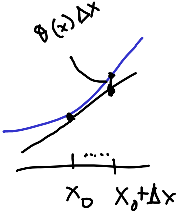
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \tan\alpha$$



Εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Η παράγωγος ως προσέγγιση



Ας πάρουμε $x \to x_0$ και ας γράψουμε $x = x_0 + \Delta x$ με $\Delta x \to 0$.

Από τον ορισμό της παραγώγου: $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$:

$x = x_0 + \Delta x$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \theta(x), \quad \text{με } \boxed{\theta(x) \to 0} \text{ όταν } \Delta x \to 0.$$

Κάνοντας μερικές πράξεις έχουμε

$$\underbrace{f(x_0+\Delta x)}_{\Delta x \to 0} = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\Delta x}_{\text{εξίσωση εφαπτομένης}} + \theta(x)\Delta x$$

$\to 0$ $\quad$ 0 $\quad$ $\to 0$

↳ πάει πιο γρήγορα στο 0

Συνήθως γράφουμε

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \boxed{o(\Delta x)}.$$

o-μικρό

$A = o(B)$ όταν $x \to 0$ $\quad | \quad \frac{A}{B} \to 0$

$$\frac{\theta(x)\Delta x}{\Delta x} = \theta(x) \to 0$$

Παράγωγος και αλγεβρικές πράξεις

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} + \underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}$$

Αν f, g παραγωγίσιμες στο x_0 τότε και η $f+g$ είναι και

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

$$\boxed{(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).}$$

Επίσης

$$\boxed{(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).}$$

$f'(x_0)$ υπάρχει

$\Downarrow$

f συνεχής στο x_0

$$(fg)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0))$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0))$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{f(x_0+h)}_{f(x_0)} \underbrace{\frac{1}{h}(g(x_0+h) - g(x_0))}_{g'(x_0)} + \lim_{h\to 0} g(x_0) \underbrace{\frac{1}{h}(f(x_0+h) - f(x_0))}_{f'(x_0)}.$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \to 0$$

$$\underbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}_{\to 0} - \underbrace{hf'(x_0)}_{\to 0} \to 0$$

σταθ.

$f(x_0+h) \to f(x_0)$

συνέχεια

Παράγωγος και αλγεβρικές πράξεις, συνέχεια

Αν f παραγωγίσιμη στο x_0 και $\boxed{f(x_0) \neq 0}$ έχουμε

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

$$-f'(x_0)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)}\right)\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{f(x_0)\underbrace{f(x_0+h)}_{f(x_0)}} \boxed{\frac{1}{h}(f(x_0) - f(x_0+h))}\\ &= \frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}.\end{aligned}$$

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$$

Συνδυάζοντας με τον κανόνα του γινομένου παίρνουμε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Παράγωγος και αλγεβρικές πράξεις, εφαρμογή

$f(x) = x^n$ όπου $n = 1, 2, \ldots$

$n=1 \quad x' = 1 \quad \checkmark$

$(x^n)' = n x^{n-1} \Rightarrow (x^{n+1})' = (n+1)x^n$

Χρησιμοποιώντας επαγωγή δείχνουμε $(x^n)' = nx^{n-1}$

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x' \cdot x^n + x(x^n)' = x^n + x n x^{n-1} = x^n + n x^n = (n+1)x^n$$

$g(x) = x^k$ με $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad k < 0$

$$(x^k)' = \left(\frac{1}{x^{-k}}\right)' = \frac{-(x^{-k})'}{x^{-2k}} = \frac{-(-k)x^{-k-1}}{x^{-2k}} = k x^{-k-1+2k} = k x^{k-1}$$

$$(x^k)' = k x^{k-1}$$

Παράγωγος και σύνθεση: ο κανόνας της αλυσίδας

$f(g(x))$ $f(\cdots)$ $f'(x_0)$ $\frac{df}{dx}(x_0)$

Αν

- υπάρχει η $g'(x_0)$ και
- υπάρχει η $f'(g(x_0))$ τότε

υπάρχει η παράγωγος της $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ στο x_0 και

$$\boxed{(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).}$$

Άλλος συμβολισμός:

$$\boxed{\frac{d(f(g(x)))}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg}{dx}.}$$

$\frac{d}{dx}$ $\qquad \frac{(\ )'}{}$

Κανόνας της αλυσίδας: απόδειξη

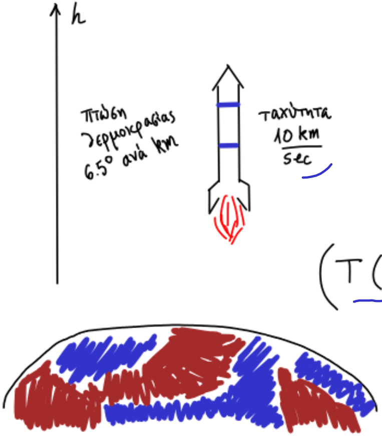
$$
\begin{aligned}
(f(g(x)))'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\
&= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0),
\end{aligned}
$$

$y \longrightarrow y_0$

αφού $g(x_0+h) \to g(x_0)$ λόγω συνέχειας της g.

$$\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \xrightarrow{y\to y_0} f'(y_0) = f'(g(x_0))$$

Απλή εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας



Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας μέσα στον πύραυλο;

- $T(h)$ = η θερμοκρασία στο ύψος h • $T'(h) = -6.5\ \frac{°}{km}$
- $h(t)$ = το ύψος του πυραύλου το χρόνο t • $h'(t) = 10\ km/sec$

$$\big(T(h(t))\big)' = T'(h(t)) \cdot h'(t) = -6.5 \times 10 = -65\,°/s$$

$$\frac{d\,T(h(t))}{dt}$$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, dashed, dash] \arrow[dd, bend right] \\ h \arrow[d, dashed, dash] \\ t \end{tikzcd}$$

Εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας

$$f(t) = (2t^3 + \sin t)^5$$

$$F(x) = \sin\left((2t^3 + \sin t)^5\right)$$

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(x^5)' = 5x^4$
- $(t^3)' = 3t^2$

$$f(t) = g(h(t))$$

$$h(t) = 2t^3 + \sin t \Rightarrow 6t^2 + \cos t = h'(t)$$

$$g(t) = t^5 \Rightarrow g'(t) = 5t^4$$

$$f'(t) = g'(h(t))\, h'(t)$$

$$= 5h(t)^4\, h'(t)$$

$$= 5(2t^3 + \sin t)^4 (6t^2 + \cos t)$$

$$t \to y = 2t^3 + \sin t$$

$$y \to z = y^5$$

$$t \to y \to z \to F$$

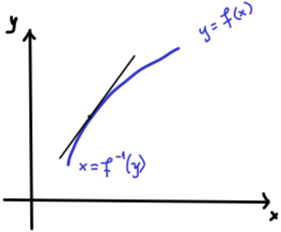
$$z \to F = \sin z$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dz}\,\frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dt} = \cos z \cdot 5y^4 \cdot (6t^2 + \cos t)$$

$$= \cos z \cdot 5(2t^3 + \sin t)^4 \cdot (6t^2 + \sin t)$$

$$= \cos\left((2t^3 + \sin t)^5\right) \cdot 5(2t^3 + \sin t)^4 \cdot (6t^2 + \sin t)$$

Η παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης



$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Έχουμε $f^{-1}(f(x)) = x$. Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη

$$1 = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) \implies (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

ή, γράφοντας $y = f(x)$,

$f^{-1}(y) = x$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Αντίστροφη συνάρτηση: απλή εφαρμογή

$x, y > 0$

$y = \sqrt{x}$

Ποια η παράγωγος της $y = \sqrt{x}$;

$\sqrt{y^2} = y$

$y^2 = x$

$\boxed{(x^n)' = n x^{n-1}}$

Είναι αντίστροφη της y^2 που έχει παράγωγο $2y$ άρα

$(x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}$ ✓

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Ομοίως, αν $n \in \mathbb{N}$ η $y = x^{1/n}$ είναι αντίστροφη της $x = y^n$ που έχει παράγωγο ny^{n-1} άρα

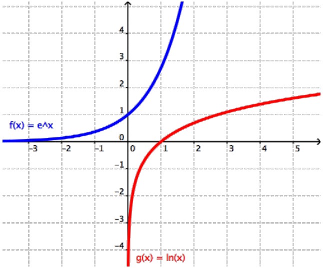
$$\left(x^{1/n}\right)' = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{1}{n}(n-1)}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Γενικότερα ισχύει αν $s \in \mathbb{R}$

$$(x^s)' = sx^{s-1}.$$

Η παράγωγος της e^x και $\ln x$

$f(t) = \left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ $\lim_{t\to+\infty} f(t) = e$



$n \leq t < n+1 \quad (n = \lfloor t \rfloor)$

$\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\geq$

$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\downarrow\, e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}}_{\downarrow\, 1}$

Υποθέτουμε για την εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση:

- $e = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\cancel{1/n}\, n} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\cancel{1/t}\, t}$ ✓
- e^x, $\ln x$ γνήσια αύξουσες συναρτήσεις, αντίστροφες η μια της άλλης
- e^x, $\ln x$ συνεχείς συναρτήσεις
- e^x, $\ln x$ έχουν τις γνωστές μας αλγεβρικές ιδιότητες, π.χ. $(e^a)^b = e^{ab}$ $\quad e^a e^b = e^{a+b}$

Η παράγωγος της e^x και $\ln x$

$\alpha \ln b = \ln b^{\alpha}$

Έχουμε

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(e^{x+h}-e^x) = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}. = 1$$

$t = \frac{1}{y} \to +\infty$

$(1+y)^{1/y} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}_{\to e}$

Αλλά, γράφοντας $y = e^h - 1$ (με $y \to 0$ όταν $h \to 0$) έχουμε

$h \to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln\left(\underbrace{(1+y)^{1/y}}_{\to e}\right)} \to \frac{1}{\ln e} = 1$$

άρα $(e^x)' = e^x$.

Έχουμε επίσης γράφοντας $y = e^x$:

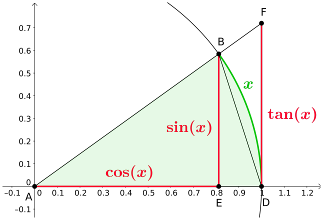
$$(\ln y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

$(\ln y)' = \frac{1}{y}$

Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$\frac{\sin x}{x} = 1$

Πρώτα χρειαζόμαστε το πολύ χρήσιμο όριο: $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$.



$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\underbrace{\text{Εμβαδό τριγώνου } ABE}_{\frac{1}{2}\cos x \sin x} \le \underbrace{\text{Εμβαδό κυκλικού τομέα } ABD}_{\pi \frac{x}{2\pi}} \le \underbrace{\text{Εμβαδό τριγώνου } AFD}_{\frac{1}{2}\tan x}$$

$\le$ $\quad \pi\frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$ $\quad \le$ $\quad \frac{1}{2}\tan x = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$

Διαιρώντας δια $\sin x/2$ παίρνουμε: $\cos x \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}$

$\downarrow 1 \qquad \downarrow 1 \qquad \downarrow 1$

Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων, συνέχεια

$\cos x$ $\underline{\text{συνεχής}}$

Χρειαζόμαστε επίσης τον τύπο: $\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$.

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\sin\underbrace{(x+h)}_{a} - \sin\underbrace{x}_{b}) = \lim_{h\to 0}\underbrace{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}_{\to \cos x}\underbrace{\frac{\sin(h/2)}{h/2}}_{\to 1} = \cos x$$

$(\sin x)' = \cos x$

Για την παράγωγο του $\cos x$ παραγωγίζουμε τη σχέση

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$\cos x\,(\sin x + (\cos x)') = 0$

και

$$2\sin x(\sin x)' + 2\cos x(\cos x)' = 0 \implies \sin x\cos x + \cos x(\cos x)' = 0 \implies \boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

Έχουμε λοιπόν

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

Παραδείγματα υπολογισμού παραγώγων

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Για $a > 0$: $(a^x)' = \left(e^{\ln a \cdot x}\right)' = e^{\ln a \cdot x} \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x$

Αν $y = \tan x$ ή $x = \arctan y$: $(\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$

$$(\sqrt[n]{1+\cos x})' = \left((1+\cos x)^{1/n}\right)' = \frac{1}{n}(1+\cos x)^{\frac{1}{n}-1}(-\sin x)$$

$$p(x) = (\overbrace{p_n x^n}^{n p_n x^{n-1}} + \overbrace{p_{n-1}x^{n-1}}^{(n-1)p_{n-1}x^{n-2}} + \cdots + p_1 x + p_0)' = n p_n x^{\boxed{n-1}} + (n-1)p_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2p_2 x + p_1$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x \tan^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x(\tan^2 x + 1) = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

Παραγώγιση πεπλεγμένης συνάρτησης

$0 \leq x, y \leq 1$

Έστω $y = f(x)$ ικανοποιεί $\underbrace{x^2 + y^2 = 1}$. Ποια η παράγωγος $y' = f'(x)$;

$\hookrightarrow y = \sqrt{1-x^2}$

1ος τρόπος: λύνουμε ως προς y και παραγωγίζουμε $\quad y' = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}$

2ος τρόπος: παραγωγίζουμε χωρίς να λύσουμε τη σχέση ανάμεσα σε x, y.

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$2x + (y^2)' = 0$$

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \underline{y' = \frac{-x}{y}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$