

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς. Αν έχετε πρόβλημα να λύσετε κάποια άσκηση ζητήστε βοήθεια στο Forum του μαθήματος. Οι λύσεις θα δημοσιεύονται 1-2 βδομάδες μετά από την ανάρτηση του κάθε Φυλλαδίου ασκήσεων.

1. (a) Δείξτε ότι η συνάρτηση  $\sin \frac{1}{x}$  δεν είναι συνεχής στο 0, όπως και αν την ορίσουμε στο 0.  
 (b) Δείξτε ότι η συνάρτηση  $x \sin \frac{1}{x}$  είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0, αν της δώσουμε κατάλληλη τιμή στο 0.  
 (c) Δείξτε ότι η συνάρτηση  $x^2 \sin \frac{1}{x}$  είναι παραγωγίσιμη στο 0, αν της δώσουμε κατάλληλη τιμή στο 0.
2. (a) Αν  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι φραγμένη συνάρτηση δείξτε ότι η  $g(x) = x^2 f(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο 0.  
 (b) Βρείτε μια συνάρτηση  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που να είναι παραγωγίσιμη μόνο στο 0.  
 💡 Για το (b) χρησιμοποιήστε το (a) και τη συνάρτηση του Dirichlet  $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$  που ισούται με 1 αν  $x \in \mathbb{Q}$  (ρητός) και με 0 αν  $x \notin \mathbb{Q}$  (άρρητος).
3. Βρείτε ένα τύπο για την παράγωγο του γινομένου τριών συναρτήσεων  $(f \cdot g \cdot h)'$ .
4. Βρείτε ένα τύπο για την παράγωγο της σύνθεσης τριών συναρτήσεων  $f(g(h(x)))$ .
5. Δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες που μεταβάλλονται με το χρόνο με τρόπο ώστε ο μεταξύ τους δακτύλιος να έχει πάντα εμβαδό ίσο με  $9\pi$ . Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του μεγαλύτερου κύκλου είναι σταθερός και ίσος με  $10\pi$ . Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του μήκους της περιφέρειας του μικρού κύκλου όταν αυτός έχει εμβαδό ίσο με  $16\pi$ ;
6. Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην έλλειψη με εξίσωση  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  στο σημείο  $(x_0, y_0)$ ;
7. Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $a$  και  $f(a) \neq 0$  δείξτε ότι και η  $|f|$  είναι παραγωγίσιμη στο  $a$ .
8. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν συναρτήσεις  $f, g$ , παραγωγίσιμες στο 0 και με  $f(0) = g(0) = 0$  τέτοιες ώστε
 
$$x = f(x)g(x)$$
 για  $x \in [-1, 1]$ .
9. Έστω  $a > 1$  και  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^a}$  (ορίζουμε  $f(0) = 0$ ). Δείξτε ότι υπάρχει παντού η  $f'$  και είναι συνεχής παντού εκτός από το 0.