Ποιο είναι το όριο στο $+\infty$ της ακολουθίας

$$a_n = \left(1+\frac{k}{n}\right)^n;$$

Το $k$ είναι ένας άγνωστος αλλά σταθερός φυσικός αριθμός.

Η απάντησή σας είναι συνάρτηση του $k$.

$$\left(\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}\right)^k = \left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}_{\to e}\right)^k \to e^k$$

$$\frac{n}{k} \to t$$

$$n = \ell k$$

$$\frac{n}{k} = \ell$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

$$\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \geq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^t \geq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$f(t) = \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \xrightarrow{t\to+\infty} e$$

$$f(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

$$\boxed{n \leq t < n+1}$$

$f(t)$, $f(n)$ πάρα πολύ κοντά

$$n \leq t < n+1$$

$$\lim_{t \to +\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

$$\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \geq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^t \geq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\downarrow \atop e} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}}_{\downarrow \atop 1} \longrightarrow e$$

$$\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\downarrow \atop e} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\downarrow \atop 1} \longrightarrow e$$

## Response history

| Step | Time | Action | State | Marks |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 24/10/20, 09:00 | Started | Not yet answered | |
| 2 | 24/10/20, 09:03 | Saved: k | Answer saved | |
| 3 | 24/10/20, 10:01 | Saved: k+1 | Answer saved | |
| **4** | **24/10/20, 10:01** | **Attempt finished** | **Incorrect** | **0.00** |

Ποιο είναι το όριο της ακολουθίας

$$\frac{10^n}{(n-10)!};$$

Δώστε την απάντηση με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων. Αν είναι $+\infty$ γράψτε 1000000 (ένα εκατομμύριο). Αν είναι $-\infty$ γράψτε -1000000 (μείον ένα εκατομμύριο). Αν το όριο δεν υπάρχει γράψτε 2000000 (δύο εκατομμύρια).

Σωστό ή λάθος;

Αν $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ τότε

$$\lim_{x\to\infty} f(f(x)) = +\infty.$$

$M$

$x \geq M_1 \Longrightarrow f(f(x)) \geq M$

Υποθέστε ότι η $f$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

Select one:

- True
- False

Check

Σωστό.

Ας είναι $M \in \mathbb{R}$. Τότε, επειδή $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ υπάρχει $M' \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\Longrightarrow x > M' \Longrightarrow f(x) > M. \quad \checkmark \quad \checkmark$$

Εμείς θέλουμε να πετύχουμε $f(f(x)) > M$. Αρκεί λοιπόν, λόγω της προηγούμενης πρότασης, να πετύχουμε

$$\boxed{f(x) > M'.}$$

Και πάλι όμως επειδή $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ υπάρχει $M'' \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$y > M'' \Longrightarrow f(y) > M'. \quad \checkmark$$

Άρα

$$y > M'' \Longrightarrow f(y) > M' \Longrightarrow f(f(y)) > M,$$

και έτσι αποδείξαμε το ζητούμενο.

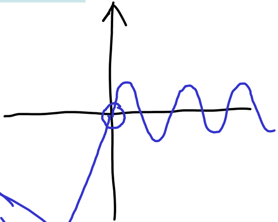
The correct answer is 'True'.

Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο 0;

- [ ] 1. $f(x) = \mathbf{1}\,(x \le 0)2x + \mathbf{1}\,(x > 0)x = \begin{cases} 2x & \alpha\nu\ x \le 0 \\ x & \alpha\nu\ x > 0 \end{cases}$
- [ ] 2. $f(x) = \mathbf{1}\,(x \le 0)2x + \mathbf{1}\,(x > 0)(x+1)$
- [ ] 3. $f(x) = \underbrace{\mathbf{1}\,(x \le 0)2x}_{} + \underbrace{\mathbf{1}\,(x > 0)}_{}\sin x$ ✓

$\boxed{1\ (\text{συνθήκη})}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \alpha\nu\ x \le 0 \\ \sin x & \alpha\nu\ x > 0 \end{cases}$$



$$g(x) = 1\,(x \le 1)3 + 1\,(x > 1)5$$ ✓

0 1

$$f(x)\,g(x) = 1\,(x \le 0)\cdot 2x\ 1\,(x \le 1)\cdot 3$$
$+$

$x_n$ $\qquad n = 1, 2, \ldots$ $\qquad x_n : 1.1, -2, 3, 4, 5, 6, 0, -1, \ldots$

$\qquad n_k = 2, 3, 5, 6, \ldots$

$x_{n_k}$ $\qquad k = 1, 2, \ldots$ $\qquad x_{n_k} : -2, 3, 5, 6, \ldots$

$\qquad k_l = 1, 3, 4, \ldots$

$x_{n_{k_l}}$ $\qquad l = 1, 2, 3, \ldots$ $\qquad x_{n_{k_l}} : -2, 5, \ldots$

$n_{k_l}$

$x_n$

$\ldots$

$x_{n_k}$ μετονομάζεται $\underline{\underline{x_n}}$

Υπάρχει μια διάταξη των παρακάτω ακολουθιών έτσι ώστε τελικά να ισχύει η παρακάτω ανισότητα ανάμεσά τους.

$\square < \square < \square$.

Τοποθετήστε τις παρακάτω ακολουθίες στις σωστές θέσεις:

1. $2^n$
2. $3^n - 2^n$
3. $1.1^{2n}$

$$1.1^{2n} = \left((1.1)^2\right)^n = 1.21^n \leq 2^n$$

$$2^n \leq 3^n - 2^n$$

$$2 \cdot 2^n \leq 3^n$$

$$2 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n \checkmark$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \to +\infty$$

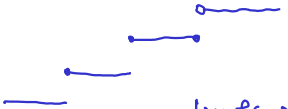
$$\Longrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$$

$$0 \leq 1$$

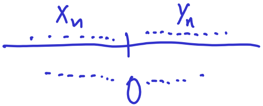
Η συνάρτηση $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο $(-1, 1)$.

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;



- [ ] 1. Το όριο $\lim_{x\to 0-} f(x)$ υπάρχει.
- [ ] 2. Το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει.
- [ ] 3. $\lim_{x\to 0-} f(x) \leq \lim_{x\to 0+} f(x)$

$\lim f(x_n) = \lim_{x\to 0-} f(x)$




$\lim f(y_n) = \lim_{x\to 0+} f(x)$

1. Σωστό. Η συνάρτηση είναι μονότονη στο (-1, 0) άρα υπάρχει το όριο στο 0 από αριστερά.

2. Λάθος. Τα πλευρικά όρια υπάρχουν και τα δύο αλλά μπορεί να μην είναι ίδια. Πάρτε για παράδειγμα τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu\ x \leq 0 \\ 1 & \alpha\nu\ x > 0 \end{cases}.$$

3. Σωστό. Πάρτε μια ακολουθία $x_n \to 0-$ και μια ακολουθία $y_n \to 0+$, ώστε ισχύει $x_n < y_n$ και άρα, από τη μονοτονία της $f$, ισχύει $f(x_n) \leq f(y_n)$, ανισότητα που μεταβιβάζεται στα όρια των $f(x_n)$, $f(y_n)$ τα οποία είναι ακριβώς τα πλευρικά όρια της $f$ στο 0.

$f(x) > f(y)$

$x < y$

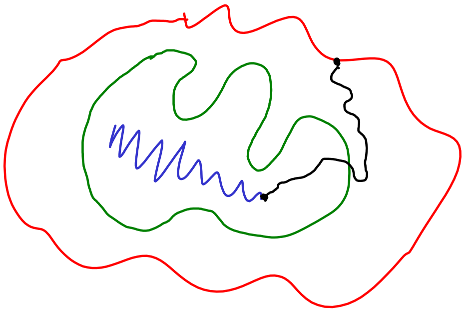
$x_n \leq y_n$

$f(x_n) \leq f(y_n)$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\lim \leq \lim$

# Θεώρημα καμπύλης του Jordan



Αν για κάποια συνάρτηση $f(x)$ ισχύει $\lim_{x\to 10} f(x) = L > 0$ ποιο είναι το όριο της συνάρτησης

$$g(x) = f(x)^2$$

για $x \to 10$;

Η απάντησή σας είναι συνάρτηση του $L$.

$L^2$


$\exists \delta_1 > 0 : \boxed{|x-10| < \delta_1} \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{L}{2}$

$\Rightarrow f(x) < \frac{3L}{2}$

$\lim_{x\to 10} f(x)^2 = L^2$ $\quad \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ τ.ω. $|f(x)^2 - L^2| < \epsilon$

αρκεί $|x-10| < \delta$.

$|f(x) - L| \cdot |f(x) + L| < \epsilon$

$< \frac{5}{2} L$

$|f(x) + L| < \frac{5}{2} L$

$|x-10| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{2\epsilon}{5L}$

$\delta < \delta_1$

$|f(x) - L| < \boxed{\frac{2}{5L}\epsilon}$

$\cos x$ , $\sin x$

$\cosh x$ $\quad$ $\sinh x$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad \cosh^{-1}$$

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \sinh^{-1}$$

5.7.2. Αποδείξτε ότι

(i) arctanh $x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$.

(ii) arccoth $x = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Παρατηρήστε ότι οι δύο συναρτήσεις arctanh $x$ και arccoth $x$ σχηματίζουν *μία* συνάρτηση με τύπο $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Σχεδιάστε το γράφημά της και βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

$$\tanh\left(\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\right) = x$$

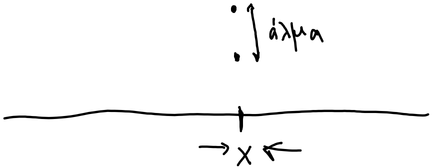
$f(x)$

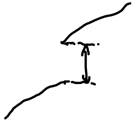
$f^{-1}(x) = g(x)$

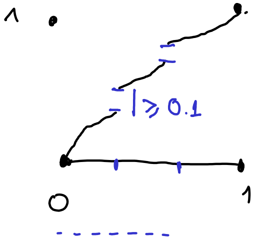
$$f(g(x)) = x$$

Η $f : [0,1] \to [0,1]$ είναι αύξουσα και ικανοποιεί $f(0) = 0,\ f(1) = 1.$

Πόσα το πολύ σημεία μπορούν να υπάρχουν στο $[0,1]$ στα οποία η $f$ να παρουσιάζει ασυνέχεια άλματος με το άλμα (διαφορά των πλευρικών ορίων στο σημείο) να είναι $\geq 0.1$;





Μια τέτοια συνάρτηση είναι η λεγόμενη συνάρτηση του Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ x\ \rho\eta\tau\acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma \\ 0 & \alpha\nu\ x\ \acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma. \end{cases}$$

$\chi_{\mathbb{Q}}(x)$

$A \subseteq \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ x \in A \\ 0 & \alpha\nu\ x \notin A \end{cases}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$$

$A = [0, 1)$

Ας δείξουμε ότι όποιο και να είναι το $x$ η $f$ δε μπορεί να είναι συνεχής σε αυτό.

Αν $x \in \mathbb{Q}$ (το $x$ είναι ρητός) τότε $f(x) = 1$, αλλά υπάρχει ακολουθία αρρήτων που συγκλίνει στο $x$

$\notin \mathbb{Q}$

$$x \leftarrow x_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n}$$

$$x_n = \frac{k}{l}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{n} = \frac{k}{l} - x \to \text{ρητός}$$

και $f(x_n) = 0$ άρα $\lim f(x_n) \neq f(x)$ οπότε η $f$ δεν είναι συνεχής στο $x$.

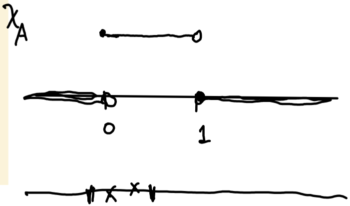
Αν $x \notin \mathbb{Q}$ (το $x$ είναι άρρητος) τότε $f(x) = 0$ και υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών που συγκλίνει στο x

$\in \mathbb{Q}$

$$x_n = \tau o\ \varepsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\ \alpha\kappa\acute{\varepsilon}\rho\alpha\iota o\ \pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\ \tau o\upsilon\ \frac{1}{n}\ \pi o\upsilon\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota > x.$$

$x_n \downarrow x$

$$0 \leq x_n - x \leq \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \to x$$




Τότε όμως $f(x_n) = 1$ και έχουμε και πάλι $\lim f(x_n) \neq f(x)$ οπότε και πάλι η $f$ είναι ασυνεχής στο $x$.