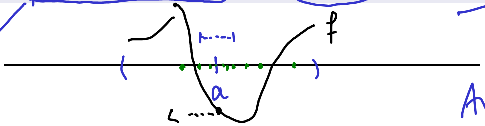
# Όριο συνάρτησης $f$ σε ένα σημείο $a$ με ακολουθίες

**Θεώρημα**

Αν $\lim_{x\to a} f(x) = L$ και $x_n \to a$ τότε $f(x_n) \to L$.

$x_n \in$ πεδίο ορισμού




$x_n \to a \implies f(x_n) \to L$

Αν $\varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon$

Αν $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0 : |x - a| < \delta,\ x \neq a \implies |f(x) - L| < \epsilon$

$|x_n - a| < \delta$

$n_0$ τέτοιο ώστε $n \geq n_0 \implies |x_n - a| < \delta$

$x_n \to a \quad f(x_n) \to A, \quad y_n \to a, \quad f(y_n) \to B \neq A \Big\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f$ δεν υπάρχει

# Όριο συνάρτησης $f$ σε ένα σημείο $a$ με ακολουθίες, συνέχεια

ισχύει και για $a=+\infty$, $a=-\infty$

**Θεώρημα**

*Αν για κάθε ακολουθία* $x_n \neq a$ *με* $x_n \to a$ *ισχύει* $\boxed{\lim_n f(x_n) = L}$ *τότε*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

Έστω ότι δεν ισχύει $\longrightarrow$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x$ με $|x-a|<\delta : |f(x)-L|<\varepsilon$

άρνηση

$\exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists x$ με $|x-a|<\delta$ τ.ώ. $|f(x)-L| \geq \varepsilon$

$a-\delta$, $a$, $a+\delta$, $\delta$

$|f(x)-L| \geq \varepsilon$

$\delta = \frac{1}{100}, \frac{1}{200}, \frac{1}{300}, \ldots, \frac{1}{100\cdot n}, \ldots$ ακολουθία από δ

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

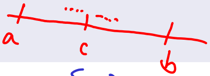
$|x_i - a| < \frac{1}{100\cdot i} \Longrightarrow x_n \to a$

$|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$ αντίφαση γιατί $f(x_n) \to L$

# Όριο μονότονης συνάρτησης $\forall x_n \to b \quad f(x_n) \to L$

## Θεώρημα

*Αν $f$ μονότονη στο διάστημα $(a,b)$ τότε*




$$\lim_{x\to b-} f(x) \text{ υπάρχει.}$$

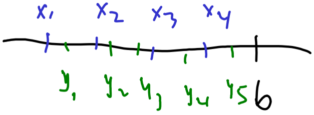
$$\lim_{x\to a+} f(x) \text{ υπάρχει}$$

Αρκεί να δείξουμε όλα $x_n \to b^-$ έχουμε το ίδιο όριο για την $f(x_n)$.

Αρκεί να ελέγξουμε αύξουσες $x_n \to b^-$. $\Longrightarrow$ $f(x_n)\uparrow$ άρα συγκλίνει στο $\overline{\mathbb{R}}$

$x_n, y_n$ αύξ., $x_n \to b^-$, $y_n \to b^-$ αλλά $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$

$L_1 \cancel{\neq} L_2$




$x_n \quad y_n$

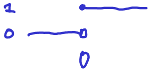
~~$z_n : x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots$~~

$f(x_n) \quad f(y_n)$

$f(w_n) \to L$

$\uparrow$ $w_n : x_1, y_1, x_2, y_2, y_3, x_3, y_4, x_4, y_5, \dots$ $\quad w_n \to b$

# Συνέχεια συνάρτησης σε ένα σημείο

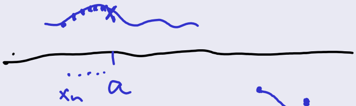


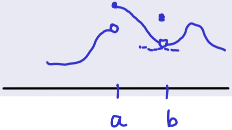

## Ορισμός

*Αν η $f$ ορίζεται στο $a \in \mathbb{R}$ και*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

*η $f$ λέγεται συνεχής στο $a$.*




$f(x) = x^2$ συνεχής σε κάθε $a \in \mathbb{R}$

$a-\delta \quad a \quad a+\delta$

$f(x) = x$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| < \epsilon$

$0 < \delta < 1$

$|x-a| \cdot |x+a| < \epsilon$

$|x+a| < |x| + |a| < 2|a| + 1$

$\leq |x-a| (2|a|+1) < \epsilon$

$\delta > |x-a| \geqslant |x| - |a| \Rightarrow |x| \leq |a| + \delta \leq |a| + 1$

$|x-a| < \frac{\epsilon}{2|a|+1} = \delta$

# Κάποιες πράξεις που διατηρούν τη συνέχεια

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_n f(x_n)$

$\boxed{x_n \to a}$

Αν $f, g$ συνεχείς στο $a \in \mathbb{R}$ τότε

- Και η $f \pm g$ συνεχείς στο $a$
- Και η $f \cdot g$ συνεχής στο $a$
- Και η $|f|$ συνεχής στο $a$
- Αν, επιπλέον, $g(a) \neq 0$ τότε και η $f/g$ συνεχής στο $a$.

$f(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 1 & x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow |f|(x) = 1, \quad a=0$

$g(a) \neq 0$

$f+g$ συνεχής στο $a$

Αρκεί αν $x_n \to a$ τότε $(f+g)(x_n) \longrightarrow (f+g)(a)$

$f(x_n) + g(x_n) \longrightarrow f(a) + g(a)$

$x_n \to x$

$\Downarrow$

$|x_n| \to |x|$

$||x_n| - |x|| = ||x_n| - |-x|| \leq |x_n - x|$

Τριγωνική ανισότητα

$||a| - |b|| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$

$x_n \to a$

$f(x_n) \to F = \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$g(x_n) \to G = \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

$= g(a)$

$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(a)}{g(a)}$

# Η σύνθεση συναρτήσεων διατηρεί τη συνέχεια

Αν $f$ συνεχής στο $a$ και η $g$ συνεχής στο $f(a)$ τότε

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

επίσης συνεχής στο $a$.

Αρκεί για $x_n \to a$ να δείξουμε $g(f(x_n)) \to g(f(a))$ ✓

Από συνέχεια της $f$ στο $a$: $f(x_n) \to f(a)$

Από συνέχεια της $g$ στο $f(a)$: $g(f(x_n)) \to g(f(a))$

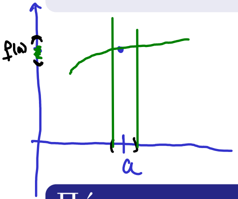
# Συνέχεια και ανισότητες

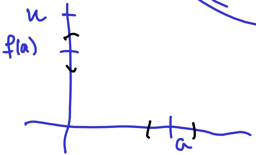
$\cancel{f(a) \le u \quad \dots \quad f(x) \le u}$

## Θεώρημα

*Αν $f$ συνεχής στο $a \in \mathbb{R}$ και $f(a) < u \in \mathbb{R}$ τότε σε κάποιο διάστημα γύρω από το $a$ ισχύει*

$$f(x) < u.$$

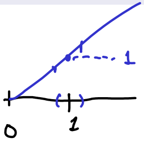



$f(x) = x$

$a = 1$

$u = 1$




## Πόρισμα

*Αν $f$ συνεχής στο $a$ τότε σε κάποιο διάστημα γύρω από το $a$ η $f$ είναι φραγμένη.*

$v < f(x) < u$

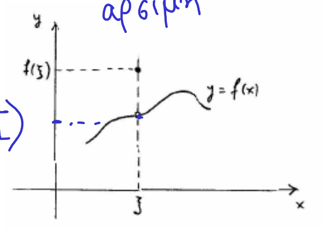
$f$ συν. στο $a$ $\quad v < f(a) < u$

$-f$ συν. στο $a$ $\quad -u < \boxed{-f(a) < -v} \quad -f(x) < -v \quad f(x) > v$

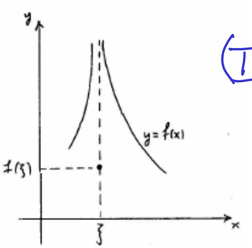
# Μορφές ασυνέχειας μιας συνάρτησης

άρσιμη

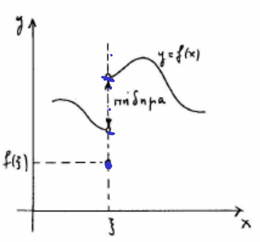
(I)



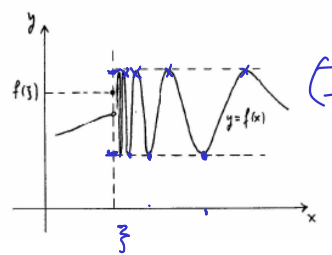

(IV)




(II)




(III)



# Φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\{x_n\}$ πεπερασμένη

**Θεώρημα**

*Αν $x_n \in [a, b]$ τότε υπάρχει υπακολουθία $x_{n_k}$ της $x_n$ που συγκλίνει.* σε πραγματ. αριθμό

$n_1 = 1$ $\quad x_1 \quad x_{n_1}$

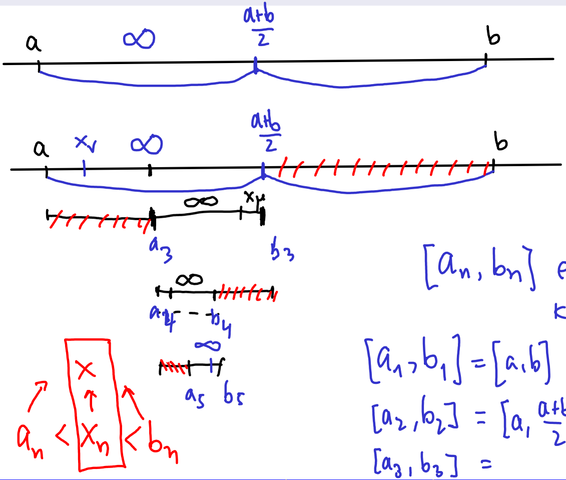
$n_2 = \nu$ $\quad x_\nu \quad x_{n_2}$

$n_3 = \mu$ $\quad x_\mu \quad x_{n_3}$

$n_4 = \tau$ $\quad x_\tau \quad x_{n_4}$

$n_5 = \sigma$ $\quad x_\sigma \quad x_{n_5}$

$\vdots$




$x_n \uparrow \Rightarrow$ συγκλίνει

$\varepsilon$

$n_0$

$[a_n, b_n]$ είναι το διάστημα που κοιτάμε σε κάθε βήμα

$[a_1, b_1] = [a, b]$

$[a_2, b_2] = [a, \frac{a+b}{2}]$

$[a_3, b_3] =$

$a_n \uparrow \to x$

$b_n \downarrow \to y$

$x = y$

$|a_n - b_n| = \frac{b-a}{2^{n-1}} \to 0$

# Θεώρημα φραγμένης συνάρτησης

$\exists M: \ |f(x)| \leq M, \ \forall x \in [a,b]$

**Θεώρημα**

*Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε η $f$ είναι φραγμένη στο $[a,b]$.*

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ συνεχής αλλά όχι φραγ.: $(0,1)$, $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Έστω $f$ δεν είναι φρ. στο $[a,b]$.

$\forall M>0 \ \exists x\in[a,b]: \ |f(x)|>M$

$M=1,2,3,\dots$

$\forall n \ \exists x_n \in [a,b]: \ |f(x_n)|>n$

$\Longrightarrow \ |f(x_n)| \to +\infty$

αντίφαση

$a \leq x_{n_k} \leq b \Longrightarrow a \leq x \leq b$

$x_{n_k} \xrightarrow[k]{} x \in [a,b]$

$f(x_{n_k}) \xrightarrow{k} f(x) \in \mathbb{R}$

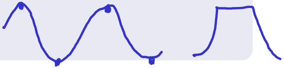
$|f(x_{n_k})| \longrightarrow |f(x)| \in \mathbb{R}$

# Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής μιας συνάρτησης

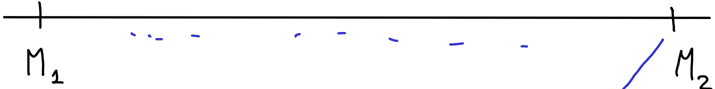
**Θεώρημα**

Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a,b]$ τ.ώ.

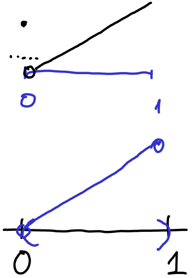
$$\forall x \in [a,b] : \quad f(x_1) \le f(x) \le f(x_2).$$



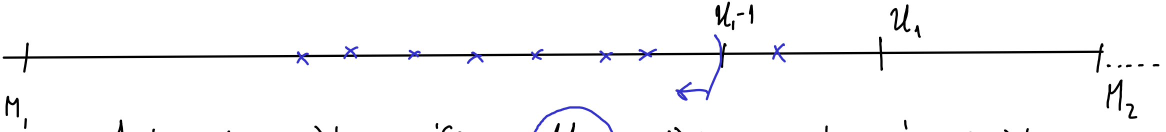
$\forall x : \quad M_1 \le f(x) \le M_2$




πολλά άνω φράγματα




$f : (0,1) \to \mathbb{R}$




Ακέραια άνω φράγματα. Έστω $U_1$ το ελάχιστο ακέραιο άνω φράγμα των τιμών της $f$

$$\exists\, x_1 \in [a,b] : U_1 - 1 \le f(x_1) \le U_1$$

$f(x_1) \le U_1$

$U_2 - \frac{1}{2} \le f(x_2) \le U_2 \le U_1$

$U_2$ = ελάχιστο άνω φράγμα της μορφής $\frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

$x_2$ τ.ώ. $U_2 - \frac{1}{2} \le f(x_2) \le U_2 \le U_1$ ...

$U_3$ = ελ. άνω φρ. της μορφής $\frac{n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$

φθίνουσα

$U_3 \le U_2 \le U_1$

$x_3$ $\quad U_3 - \frac{1}{4} \le \underbrace{f(x_3)} \le U_3$

$\frac{n}{8}, \frac{n}{16}, \frac{n}{32}, \dots$

$$U_3 - \frac{1}{4} \le f(x_3) \le U_3 \le U_2 \le U_1$$

$$\mathcal{U} \leftarrow \boxed{u_n - \frac{1}{2^{n-1}} \le f(x_n) \le u_n} \le \cdots \le u_3 \le u_2 \le u_1$$

$$u_n \rightarrow \mathcal{U}$$

$u_n \downarrow \Rightarrow u_n \to \mathcal{U}$

$f(x_n) \to \mathcal{U} = \lim_n u_n$

$x_n \in [a,b] \Rightarrow$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $x_{n_k} \xrightarrow{k} x \in [a,b]$

Συνέχεια της $f$ : $\quad f(x_{n_k}) \to f(x)$

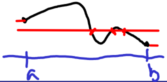
$f(x) = \mathcal{U} =$ άνω φράγμα

$y \in [a,b]$ $\quad \left.\begin{array}{l} f(y) \le u_1 \\ f(y) \le u_2 \\ \vdots \end{array}\right\} f(y) \le \lim u_n = \mathcal{U}$

$\forall y \in [a,b]$

$f(y) \le f(x)$

# Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής




$g(x) = f(x) - c$

## Θεώρημα

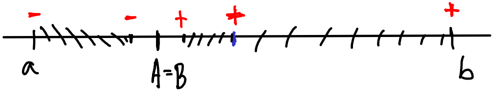
*Αν* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* $[a,b]$ *τότε για κάθε*

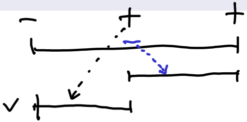
*για κάθε* $c$ *που είναι ανάμεσα στις τιμές* $f(a), f(b)$

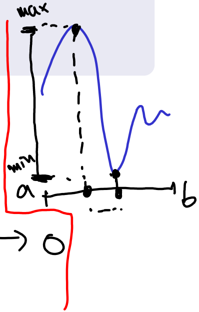
*υπάρχει κάποιο* $x \in [a,b]$ *με* $f(x) = c$.

$f(a) < f(b)$

$c = 0$






n-οστό διάστημα $(a_n, b_n)$ έχει μήκος $\frac{b-a}{2^{n-1}} \to 0$

$$
\begin{array}{ccccc}
f(a_n) & a_n \uparrow & & b_n \downarrow & f(b_n) \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
0 \geq f(A) & A & = & B & f(A) \geq 0
\end{array}
$$

$f(a_n) < 0$

$f(b_n) > 0$.

$f(A) = 0$

# Αντίστροφη συνάρτηση

$f(x_{n_{k_\ell}}) \to \underline{f(x')} \not< f(x) = y$

$\hookrightarrow$ υπακ. της $f(x_n) = y_n$

1-1

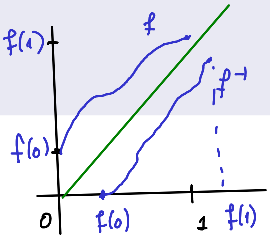
**Θεώρημα**

*Αν* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* $[a, b]$ *και γνήσια αύξουσα εκεί τότε η αντίστροφη συνάρτηση*

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$$

*είναι επίσης συνεχής στο* $[f(a), f(b)]$.

$$f(a) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad f(b) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$




$y_n \in [f(a), f(b)]$, $y_n \to y \in [f(a), f(b)]$

$\Longrightarrow f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$

$y_n = f(x_n)$ $\quad f^{-1}(f(x_n)) \to f^{-1}(f(x))$

$y = f(x)$ $\quad x_n \to x$ ✓

Έστω $x_n \not\to x$. $\exists\, \varepsilon > 0$ $|x_{n_k} - x| > \varepsilon$ $\forall k$

Για άπειρα $k$: $x_{n_k} \le x - \varepsilon$,

Υπάρχει υπακ. της $x_{n_k}$, $x_{n_{k_\ell}}$ τ.ώ.

$x_{n_{k_\ell}} \xrightarrow{\ell} x' \le x - \varepsilon$ ⭐