Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς. Αν έχετε πρόβλημα να λύσετε κάποια άσκηση ζητήστε βοήθεια στο Forum του μαθήματος. Οι λύσεις θα δημοσιεύονται 1-2 βδομάδες μετά από την ανάρτηση του κάθε Φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Υποθέτουμε ότι $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς.

(a) Αν για τον αριθμό $\ell \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε $f(x) > \ell$ δείξτε ότι υπάρχει αριθμός $c > \ell$ που να ισχύει $f(x) \geq c$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(b) Αν $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq g(x) + \delta$ για κάθε $x \in [a, b]$.

2. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και δεν ισχύει $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ούτε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο, υπάρχει δηλ. $a \in \mathbb{R}$ τ.ώ. $f(a) = a$.

3. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ και $f(x_0) > 0$ δείξτε ότι υπάρχουν $\epsilon, \delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ τότε $f(x) \geq \epsilon$.

4. Αν $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, συνεχής, τέτοια ώστε (α) $F(x) = f(x)$ για $x \in [-1, 1]$ και (β) $F(x) = 0$ αν $x \leq -1 - \epsilon$ ή $x \geq 1 + \epsilon$.

5. (a) Δείξτε ότι η συνάρτηση του Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός αριθμός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος αριθμός} \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής πουθενά.

(b) Κατασκευάστε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να είναι συνεχής μόνο στο 0.

6. (a) Αν $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει $f^2(x) = g^2(x) \neq 0$ αποδείξτε ότι είτε ισχύει για όλα τα $x \in (a, b)$ η ισότητα $f(x) = g(x)$ είτε για όλα ισχύει η ισότητα $f(x) = -g(x)$. Δείξτε ότι αυτό δεν είναι απαραίτητα σωστό αν παραλείψουμε την υπόθεση ότι οι f, g δε μηδενίζονται.

(b) Αν $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί για κάθε $x > 0$ τη σχέση $f^2(x) = x$ δείξτε ότι είτε ισχύει για κάθε $x > 0$ η ισότητα $f(x) = \sqrt{x}$ είτε για κάθε τέτοιο x ισχύει η ισότητα $f(x) = -\sqrt{x}$.