---

1. Όταν αποδείξαμε ότι μια αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία x_n συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό χρησιμοποιήσαμε το ότι υπάρχει *ελάχιστο άνω φράγμα* της ακολουθίας.

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα άνω φράγμα x της x_n που κανένα άλλο άνω φράγμα δεν είναι μικρότερό του.

Με άλλα λόγια, αν ονομάσουμε B το σύνολο όλων των άνω φραγμάτων της ακολουθίας x_n

$$z \in B \iff \text{το } z \text{ είναι άνω φράγμα της } x_n$$

τότε το σύνολο B έχει *ελάχιστο στοιχείο*, υπάρχει δηλ. $x \in B$ τέτοιο ώστε

$$z \in B \implies x \le z.$$

(Δηλ. κάθε άλλο στοιχείο του B είναι μεγαλύτερο ή ίσο του x.)

Δεν έχουν όλα τα σύνολα πραγματικών αριθμών ελάχιστο στοιχείο. Για παράδειγμα το ανοιχτό διάστημα $(1,2)$ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Όποιο στοιχείο $x \in (1,2)$ και να πάρουμε υπάρχει κάποιο άλλο $y \in (1,2)$ που να είναι μικρότερο του x (π.χ. $y = (1+x)/2$, το μέσο του διαστήματος $(1,x)$).

Ποια από τα παρακάτω σύνολα έχουν ελάχιστο στοιχείο και ποιο είναι αυτό;

(1) $A = \left\{\frac{1}{n}:\ n = 1,2,3,\ldots\right\}$ (το σύνολο δηλ. όλων των αντιστρόφων των φυσικών αριθμών).
(2) $B = \{x \in \mathbb{R}:\ x \ge 0\}$ (οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί).
(3) $C = \{x \in \mathbb{R}:\ x > 0\}$ (οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί).

Λύση:

(1) Δεν έχει. Όποιο στοιχείο του και να πάρουμε, π.χ. το $1/k$, υπάρχει άλλο στοιχείο του A που είναι μικρότερο, π.χ. το $1/(k+1)$.
(2) Το 0 είναι προφανώς ελάχιστο στοιχείο.
(3) Δεν έχει. Όποιο στοιχείο του x και να πάρουμε, υπάρχει άλλο στοιχείο του C που είναι μικρότερο, π.χ. το $x/2$, που είναι αυστηρά μικρότερο του x γιατί $x > 0$ αφού $x \in A$.

---

2. Αποδείξτε ότι

$$(a)\ \lim_{x\to\infty} \lfloor 1/x \rfloor = 0,\ (b)\ \lim_{x\to-\infty} \lfloor 1/x \rfloor = -1,\ (c)\ \lim_{x\to\infty} \lceil 1/x \rceil = 1,\ (d)\ \lim_{x\to-\infty} \lceil 1/x \rceil = 0.$$

Λύση: Αν $x > 1$ τότε $0 < \frac{1}{x} < 1$ οπότε $\lfloor 1/x \rfloor = 0$ και $\lceil 1/x \rceil = 1$ και άρα ισχύουν τα όρια στα (a) και (c) αφού οι συναρτήσεις που δίνονται εκεί είναι τελικά σταθερές.

Ομοίως, αν $x < -1$ τότε $-1 < \frac{1}{x} < 0$ οπότε $\lfloor 1/x \rfloor = -1$ και $\lceil 1/x \rceil = 0$, και άρα ισχύουν τα όρια στα (b) και (d) αφού οι συναρτήσεις εκεί είναι τελικά (όταν κινούμαστε προς το $-\infty$) σταθερές.

---

3. Υποθέστε ότι $f(x) \ne 1$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f και ας είναι $z \in \mathbb{R}$ ένα σημείο που προσεγγίζεται από τα σημεία του πεδίου ορισμού της f. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to z} f(x) = 2 \iff \lim_{x\to z} \frac{f(x)+3}{f(x)-1} = 5.$$

Λύση: Η κατεύθυνση $\implies$ είναι άμεση συνέπεια των αλγεβρικών ιδιοτήτων του ορίου.

Για την ανάποδη κατεύθυνση, ονομάζουμε

$$g(x) = \frac{f(x)+3}{f(x)-1}$$

και παρατηρούμε ότι πάντα $g(x) \ne 1$. Λύνουμε τώρα αυτή τη σχέση ως προς $f(x)$ και προκύπτει ότι

$$f(x) = \frac{g(x)+3}{g(x)-1}.$$

Υποθέτοντας ότι $\lim_{x\to z} g(x) = 5$ και εφαρμόζοντας τις αλγεβρικές ιδιότητες του ορίου και πάλι παίρνουμε ότι $\lim_{x\to z} f(x) = 2$.

---

4. Υπολογίστε τα όρια

$$(a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor 2x \rfloor}{x},\quad (b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{x} \rfloor}{x},\quad (c)\ \lim_{x\to 0+} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Λύση:

(a) Περιοριζόμαστε σε $x > 0$. Ισχύει $2x - 1 \le \lfloor 2x \rfloor \le 2x$ άρα

$$\frac{2x-1}{x} \le \frac{\lfloor 2x \rfloor}{x} \le \frac{2x}{x} = 2$$

και, παρατηρώντας ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$ παίρνουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor 2x \rfloor}{x} = 2$.

(b) Περιοριζόμαστε σε $x > 0$. Ισχύει $0 \le \lfloor \sqrt{x} \rfloor \le \sqrt{x}$ άρα

$$0 \le \frac{\lfloor \sqrt{x} \rfloor}{x} \le \frac{1}{\sqrt{x}} \to 0,$$

άρα το όριο είναι 0.

(c) Για $x > 0$ έχουμε $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \ge \frac{1}{x} - 1 \to +\infty$ άρα το όριο είναι $+\infty$.

---

5. (a) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$ δείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ τ.ώ. αν $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ και $x \ne a$ τότε $f(x) < g(x)$.

(b) Αν υποθέσουμε απλά ότι $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$ δείξτε ότι δε μπορούμε από αυτό να συμπεράνουμε ότι $f(x) \le g(x)$ σε κάποιο διάστημα γύρω από το a.

Λύση: (a) Έστω $F = \lim_{x\to a} f(x)$ και $G = \lim_{x\to a} g(x)$. Ορίζουμε $\delta = G - F > 0$.

Αφού $f(x) \to F$ για $x \to a$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ τ.ώ.

$$0 < |x-a| < \delta_1 \implies |f(x) - F| < \delta/10.$$

Επίσης, αφού $g(x) \to G$ υπάρχει $\delta_2 > 0$ τ.ώ.

$$0 < |x-a| < \delta_2 \implies |g(x) - G| < \delta/10.$$

Παίρνουμε $\epsilon = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Αν $0 < |x-a| < \epsilon$ ισχύει η υπόθεση σε κάθε μια από τις δύο παραπάνω συνεπαγωγές και άρα ισχύει

$$|f(x) - F| < \delta/10, \quad |g(x) - G| < \delta/10.$$

Από αυτές τις δύο ανισότητες έπεται ότι $f(x) < g(x)$.

(b) Αρκεί να δώσουμε ένα παράδειγμα όπου η ισχύει η υπόθεση

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

χωρίς να ισχύει η ανισότητα $f(x) \le g(x)$ σε κανένα διάστημα γύρω από το a. Πάρτε π.χ. $f(x) = (x-a)^2$ και $g(x) = -(x-a)^2$.