Ποιο είναι το όριο στο $+\infty$ της ακολουθίας

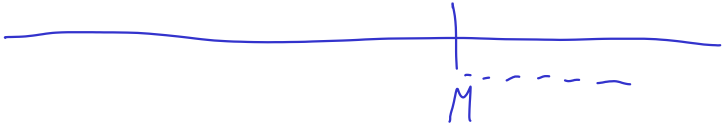
$$a_n = \frac{(rn-1)(\frac{n}{r^2}-1)}{(2+\frac{r}{n})(n-1)^2};$$

Το r είναι ένας άγνωστος αλλά σταθερός πραγματικός αριθμός (αυτό που ονομάζουμε *παράμετρος*).

Η απάντησή σας είναι συνάρτηση του r.

$$a_n = \frac{\frac{1}{r}n^2 - \frac{1}{r^2}n - rn + 1}{\underbrace{\left(2+\frac{r}{n}\right)}(n^2-2n+1)} = \frac{\frac{1}{r} - \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{r}{n}} + \cancel{\frac{1}{n^2}}}{\underbrace{\left(2+\frac{r}{n}\right)}_{\to 2}\underbrace{\left(1-\cancel{\frac{2}{n}}+\cancel{\frac{1}{n^2}}\right)}_{\to 1}} \to \frac{\frac{1}{r}}{2} = \frac{1}{2r}$$

$a_n = (-1)^n \cdot n^2$



n άρτιο : n^2

n περ. : $-n^2$

$a_{2n} \longrightarrow +\infty$

$a_{2n+1} \longrightarrow -\infty$

Υποθέτουμε ότι $a_n \to L \in \mathbb{R}$. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \forall n \geq n_0 : \ |a_n - L| < \varepsilon < \sqrt{\varepsilon}$ ✓

Στον ορισμό του ορίου υπάρχει για κάθε $\epsilon > 0$ ένας φυσικός αριθμός $n_0 = n_0(\epsilon)$ (γράφουμε $n_0(\epsilon)$ για να τονίσουμε ότι το n_0 εξαρτάται από το ϵ).

Παρακάτω επιλέξτε ακριβώς τις προτάσεις που πάντα ισχύουν υπό αυτές τις υποθέσεις.

Υποθέστε ότι το ϵ είναι πάντα στο διάστημα $(0, 1)$.

- [ ] 1. Αν το n_0 αντιστοιχεί στό ϵ τότε το n_0 είναι κατάλληλο και για το $\sqrt{\epsilon}$. $\epsilon < \sqrt{\epsilon}$
- [ ] 2. Αν το n_0 αντιστοιχεί στό ϵ τότε το n_0 είναι κατάλληλο και για το ϵ^2. $\epsilon^2 < \epsilon$ βρείτε $a_n \to \overset{L}{\overset{\shortparallel}{0}}$, ε, n_0 $\quad a_n = \frac{1}{n} \to 0$ $\quad \varepsilon = \frac{1}{10}$ $\quad n_0 = 11$
- [ ] 3. Αν το n_0 αντιστοιχεί στό ϵ τότε και το $n_0 + 1$ είναι κατάλληλο για το ϵ. $n \geq n_0 + 1 \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon < 2\varepsilon$ $\quad n \geq 11 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{11} < \frac{1}{10} = \varepsilon$
- [ ] 4. Αν το n_0 αντιστοιχεί στό ϵ τότε και το $2n_0$ είναι κατάλληλο για το 2ϵ. $\quad \varepsilon = \frac{1}{100}$ $\quad a_{11} = \cancel{\frac{1}{11} < \frac{1}{100}}$
- [x] όχι 5. Αν το n_0 αντιστοιχεί στό ϵ τότε και το $\boxed{2n_0}$ είναι κατάλληλο για το $\epsilon/2$.

Βρούμε a_n, ε, n_0

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n^{1/10}}} \quad \varepsilon = \frac{1}{5} \quad \frac{1}{n^{1/10}} < \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5 < n^{1/10} \Leftrightarrow 5^{10} < n$$

$$\boxed{n_0 = 5^{10} + 1} \cdots 2n_0 = 2(5^{10} + 1) = 2 \cdot 5^{10}$$

$$a_n = \frac{1}{\log n} \quad \varepsilon = \frac{1}{10} \quad \frac{1}{n^{1/10}} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow 10 < n^{1/10} \Leftrightarrow 10^{10} < n$$

$$n_0 = 10^{10} + 1 \qquad \frac{10^{10}}{2 \cdot 5^{10}} = 2^9$$

Υπάρχει μια διάταξη των παρακάτω ακολουθιών έτσι ώστε τελικά να ισχύει η παρακάτω ανισότητα ανάμεσά τους.

$\square \le \square \le \square \le \square$.

Τοποθετήστε τις παρακάτω ακολουθίες στις σωστές θέσεις:

1. $3n^2 - 10n + 1$
2. $2n^2 + 1000n + 50$
3. $\frac{1}{10}n^3 - 100n^2 - 30$
4. $10^6 n + 1$

4 2 1 3

$$\frac{a_k n^k + \dots}{b_\ell n^\ell + \dots} \to \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\frac{a_k}{b_\ell}\right)\infty & k > \ell \\ 0 & k < \ell \\ \frac{a_k}{b_\ell} & k = \ell \end{cases}$$

$$\frac{a_n = 3n^2 - 10n + 1}{b_n = 2n^2 + 1000n + 50} \to \frac{3}{2} > 1$$

$1 < \frac{3}{2} - \frac{1}{10}$ $\quad \frac{3}{2} + \frac{1}{10}$

1 $\quad \frac{3}{2}$

$\cancel{n^2} + 5n + 2$

$\vee\!/$

$\cancel{n^2} + 3n - 6$

$n \geq n_0$: $\frac{a_n}{b_n} > \frac{3}{2} - \frac{1}{10} > 1 \Rightarrow a_n > b_n$

$$\frac{3n^2 - 10n + 1}{\frac{1}{10}n^3 - 100n^2 - 30} \to 0$$

$$\frac{10^6 n + 1}{2n^2 + 1000n + 50} \to 0$$

$3n^1 + 5n - 10^6$

$\cancel{4n^2 + 1}$

$5n^2 - 100$ ✓

Υπάρχει μια διάταξη των παρακάτω ακολουθιών έτσι ώστε τελικά να ισχύει η παρακάτω ανισότητα ανάμεσά τους.

$\square < \square < \square < \square$.

Τοποθετήστε τις παρακάτω ακολουθίες στις σωστές θέσεις:

1. 10^n
2. 2^{n^2}
3. n^{100}
4. $\sqrt{20^n} = 20^{n/2} = (\sqrt{20})^n$

3 4 1 2

$$\frac{n^b}{\rho^n} \to 0$$

$\rho > 1$

$2^{10} \sim 10^3$

$2^{43} \sim 10^{3 \cdot 4} \cdot 2^3$

$\sim 8 \cdot 10^{12}$

$$\frac{2^{n^2}}{10^n} \underset{\text{τελ.}}{\geq} \frac{2^{10n}}{10^n} = \frac{(2^{10})^n}{10^n} = \frac{1024^n}{10^n} = (\underset{\substack{\vee \\ 1}}{102.4})^n \to +\infty$$

$n^2 \geq 10n$ τελικά $(n \geq 10)$

$$\frac{2^{n^2}}{\sqrt{20}^n} \geq \frac{2^{10n}}{\sqrt{20}^n} \geq \left(\frac{1024}{5}\right)^n \to +\infty$$

$$\frac{10^n}{\sqrt{20}^n} = \left(\underset{\substack{\vee \\ 1}}{\frac{10}{\sqrt{20}}}\right)^n \to +\infty$$

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε ότι

$$\boxed{\frac{a^n}{n!} \to 0.}$$

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει φυσικός $n_0 > |a|$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$0 \leq \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{(n_0-1)!\, n_0(n_0+1)\cdots n} \leq \frac{|a|^n}{(n_0-1)!\, n_0 n_0 \cdots n_0} = \frac{|a|^n}{(n_0-1)!\, n_0^{n-n_0+1}} = c\left(\frac{|a|}{n_0}\right)^n$$

όπου $c = \frac{n_0^{n_0-1}}{(n_0-1)!}$. Επειδή $0 \leq \frac{|a|}{n_0} < 1$, από τον κανόνα παρεμβολής συνεπάγεται $\frac{a^n}{n!} \to 0$.

$$\underline{n-(n_0-1)} = \underline{n-n_0+1}$$

Επιλέξτε τις σωστές συνεπαγωγές.

- [ ] 1. Αν η a_n είναι φραγμένη τότε και η $|a_n| + \dfrac{1}{n}$ είναι φραγμένη. ✓
- [ ] 2. Αν η $|a_n|$ είναι φραγμένη τότε και η $a_n - n$ είναι φραγμένη.
- [ ] 3. Αν η a_n είναι άνω φραγμένη τότε και η $|a_n| - n$ είναι άνω φραγμένη.
- [ ] 4. Αν η $\boxed{|a_n| \text{ είναι κάτω φραγμένη}}$ (I) τότε και η $\boxed{a_n^2 \text{ είναι κάτω φραγμένη}}$ (II).

a_n φραγ $\Longrightarrow$ $\underbrace{|a_n| + \frac{1}{n}}$ φραγ.

↳ $|a_n|$ φραγ.

(I) $\Rightarrow$ (II)

$M_2 \leq a_n \leq M_1$

$M_4 \leq b_n \leq M_3$

$\leq a_n + b_n \leq$

(I) $\Rightarrow$ (II)

$|a_n|$ φραγ.

$a_n - n$ όχι φραγ.

$a_n = 0$

$a_n - n = -n$

$a_n^2 \geq 0$

$|a_n| < M$

$\Updownarrow$

$-M < a_n < M$

$a_n^2 \geq M \Rightarrow |a_n| \geq \dots$

$a_n^2 \geq 0$

$|a_n| \geq 0$

$a_n \leq M$

$|a_n| - n$ όχι άνω φραγ.

$a_n = -2n \leq 0$

Ποιές από τις παρακάτω ακολουθίες είναι υπακολουθίες της

$$a_n : 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, \ldots;$$

0 . . .

- [ ] 1. $c_n : 0, 1, 2, 2, 0, 1, 2, 2, 0, 1, 2, 2, \ldots$
- [ ] 2. $b_n : 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, \ldots$
- [ ] 3. e_n : είναι 0 ή 1, και είναι 1 ακριβώς όταν ο n είναι πρώτος αριθμός
- [ ] 4. $d_n : 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, \ldots$

$n=1$

1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 1 ...

$x_n \in \{0, 1, 2\}$

$x_1 = 1$

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$

$x_4 = 2$

$x_5 = 1$

Θ Αν a_n έχει άπειρους όρους ίσους με 0

— — — — — — 1

— — — — — — 2

Τότε κάθε ακολουθία από 0, 1 ή 2 είναι υπακολουθία της a_n

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε ότι $\frac{n^2+n}{n+3} \to +\infty$.

Έστω οποιοδήποτε $M > 0$. Η $\frac{n^2+n}{n+3} > M$ συνεπάγεται από την $n^2 + (1 - M)n - 3M > 0$. Η ανισότητα αυτή είναι δευτέρου βαθμού και λύνεται ως προς n. Όμως αν το προσπαθήσουμε θα δούμε ότι προκύπτουν αρκετές τεχνικές λεπτομέρειες με τετραγωνικές ρίζες και περιπτώσεις και γι αυτό προτιμάμε να απλοποιήσουμε εξ αρχής την κατάσταση εφαρμόζοντας την τεχνική των προηγουμένων δύο παραδειγμάτων. Αντικαθιστούμε το $\frac{n^2+n}{n+3}$ με κάτι άλλο απλούστερο και μικρότερο. Παρατηρούμε λοιπόν ότι $\frac{n^2+n}{n+3} \geq \frac{n^2}{n+3n} = \frac{n}{4}$. Άρα η $\frac{n^2+n}{n+3} > M$ συνεπάγεται από την $\frac{n}{4} > M$ κι αυτή συνεπάγεται από την $n > 4M$. Αν θεωρήσουμε το $n_0 = [4M] + 1$ τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > 4M$ και επομένως ισχύει $\frac{n^2+n}{n+3} > M$.

Χρησιμοποιούμε την λέξη *όριο* και τα σύμβολα $\to$, $\lim_n$, $\lim_{n\to+\infty}$ όταν μία ακολουθία έχει όριο, είτε η ακολουθία συγκλίνει σε αριθμό είτε αποκλίνει σε ένα από τα $\pm\infty$. Προσέξτε: χρησιμοποιούμε το ρήμα *συγκλίνει* μόνο όταν το όριο είναι αριθμός και το ρήμα *αποκλίνει* σε κάθε άλλη περίπτωση, δηλαδή όταν το όριο είναι ένα από τα $\pm\infty$ ή όταν δεν υπάρχει όριο.

Ο φυσικός αριθμός n είναι άρτιος. $(x \geq -1)$: $(1+x)^n \geq 1+nx$

ακέραιο

Εφαρμόζουμε την ανισότητα Bernoulli για να βρούμε ένα κάτω φράγμα για την ποσότητα

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2+\frac{1}{2n}$$

αλλά όχι ως είναι.

Πρώτα γράφουμε

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right)^{n/2} = (1+\overbrace{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}^{x})^{n/2},$$

και εφαρμόζουμε την ανισότητα Bernoulli στο τελευταίο στάδιο.

$$\geq 1+\frac{n}{2}\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 1+1+\frac{1}{2n} = 2+\frac{1}{2n}$$

Ποιο είναι το κάτω φράγμα που προκύπτει;

(Συνάρτηση του n.)

$n=2k+1$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2k}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right)^k\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^k\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\geq \left(1+k\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{1}{n}+k\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{k}{n}\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1+\underbrace{\boxed{\frac{1}{2k+1}+\frac{2k}{2k+1}}}_{=1}+\frac{k}{(2k+1)^2}+\frac{2k}{(2k+1)^2}+\frac{k}{(2k+1)^3}$$

2. Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(2+\frac{1}{n}\right)^4, \quad b_n = \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+2^{n+1}}, \quad c_n = \frac{1}{\frac{1}{n}+2^{-n}}, \quad d_n = \boxed{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Λύση: $a_n \to 16 = 2^4$ αφού αυτό που είναι υψωμένο στην 4η δύναμη πάει στο 2.
Για την b_n διαιρούμε με το μεγάλο όρο στον παρανομαστή, το 3^{n+1}, και παίρνουμε

$$b_n = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$$

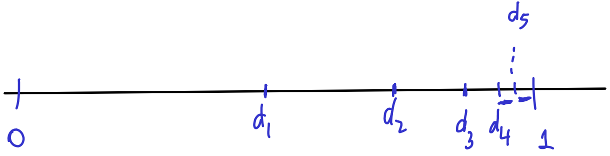
Ο αριθμητής τείνει στο 1/3 και ο παρανομαστής στο 1, άρα $b_n \to \frac{1}{3}$.
$c_n \to +\infty$ αφού ο παρανομαστής τείνει στο 0 από θετικές τιμές.
Εύκολα μπορούμε να δούμε με επαγωγή ότι $d_n = 1 - \boxed{\frac{1}{2^n}}$ άρα $d_n \to 1$.

$d_1 = \frac{1}{2}$

$d_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$d_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

$\vdots$



$$a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} - 1$$

$a = \frac{1}{2}$

$d_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

- $d_1 = 1 - \frac{1}{2}$ $\quad n=1$ ok

- Επαγ. Βήμα

$d_n = 1 - \frac{1}{2^n} \Longrightarrow d_{n+1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$

d_n

$d_{n+1} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}} + \frac{1}{2^{n+1}} = d_n + \frac{1}{2^{n+1}}$

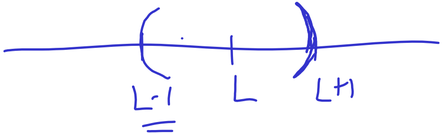
$d_{n+1} = 1 - \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι πάντα αληθείς;

- [ ] 1. Αν η $a_n \to L \in \overline{\mathbb{R}}$ τότε η a_n είναι κάτω φραγμένη. $a_n = -n$
- [ ] 2. Αν η $a_n \to L \in \mathbb{R}$ τότε η a_n είναι κάτω φραγμένη. ✓
- [ ] 3. Αν η $a_n \to L \in \mathbb{R}$ τότε η $\frac{1}{a_n}$ είναι κάτω φραγμένη. $a_n = \frac{-1}{n}$ $\frac{1}{a_n} = -n$
- [ ] 4. Αν a_n, b_n φραγμένες ακολουθίες τότε και η $a_n \cdot b_n$ είναι φραγμένη. ✓
- [ ] 5. Αν a_n, b_n κάτω φραγμένες ακολουθίες τότε και η $a_n \cdot b_n$ είναι ~~κάτω~~ άνω φραγμένη.

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

$x \in \overline{\mathbb{R}}$



$a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}$

a_n, b_n φραγ.

$|a_n|, |b_n|$ φρ.

$$\begin{vmatrix} |a_n| \le M \\ |b_n| \le N \end{vmatrix}$$

$|a_n b_n| \le M \cdot N$

$a_n b_n$ φρ.

$M < a_n = -1$

$N < b_n = n$

$a_n \cdot b_n = -n$ όχι κάτω φρ.

$a_n = 1$

$b_n = n$

$a_n < M$

$b_n < N$

$a_n = b_n = -n$

Σωστό ή λάθος;

$a^{1/n} \to 1$

Έχουμε

$$(n!)^{1/n} = 1^{1/n}2^{1/n}3^{1/n}\cdots n^{1/n} \cancel{\to} 1\cdot 1\cdot 1\cdots 1 = 1.$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \cdots \quad \downarrow$

$1 \quad 1 \quad 1 \qquad 1$

$(n!)^{1/n} \cancel{\to} 1$?

$(n!)^{1/n} < 1.5 \qquad n \geq n_0$

$n! < (1.5)^n$

$\infty \leftarrow \dfrac{n!}{(1.5)^n} < 1$

$a_n \quad b_n \quad c_n \Longrightarrow \quad a_n \cdot b_n \cdot c_n$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$a \quad b \quad c \qquad\qquad a \cdot b \cdot c$

$a_n (\underbrace{b_n c_n}_{\downarrow})$

$a \cdot bc$

Ποιο είναι το όριο της ακολουθίας $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}$;

Answer: e

Display response

e

Έχουμε

$$(1+1/n)^{n+2}=(1+1/n)^{n}(1+1/n)^{2}.$$

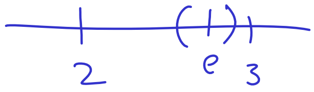
Ο πρώτος παράγοντας τείνει στο e ενώ ο δεύτερος είναι το τετράγωνο μιας ποσότητας που τείνει στο 1, άρα το όριο είναι το e.

Ποιο είναι το όριο της ακολουθίας $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$;

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$b_n = a_{n^2}$

Αριθμητική απάντηση με ακρίβεια 3 ψηφίων. Αν χρειαστείτε τον αριθμό e βάλτε στη θέση του τον 2.718281828 και κάντε με αυτόν τους υπολογισμούς σας.



Answer: 0 ✖

$b_n^{1/n} \to 1$

Το όριο είναι 1 γιατί $a_n = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{1/n}$. Η ακολουθία $b_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ είναι υπακολουθία της $(1+1/n)^n$ άρα συγκλίνει στο e. Άρα τελικά ισχύει $2 \le b_n \le 3$ και άρα τελικά

$$\underbrace{2^{1/n}}_{\downarrow\, 1} \le b_n^{1/n} \le \underbrace{3^{1/n}}_{\downarrow\, 1}$$

και ισχύει $2^{1/n} \to 1$ και $3^{1/n} \to 1$.

$$\frac{n!}{10^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 15 \cdot \ldots n}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10} = \underbrace{\frac{1 \cdot 2 \cdots 20}{\underbrace{10 \cdot 10 \cdots 10}_{20}}}_{A} \underbrace{\frac{21 \cdot 22 \cdot \ldots \cdot n}{10 \cdot 10 \cdots 10}}_{n-20} > A \cdot 2^{n-20}$$

$>2 \quad >2 \quad >2$

$$= \underbrace{\frac{A}{2^{20}}\, \underbrace{2^n}_{+\infty}}_{+\infty}$$

Εκθετικό εναντίον παραγοντικού

$a \leq 1 \quad a^n \leq 1 \Rightarrow \frac{a^n}{n!} = a^n \cdot \frac{1}{n!} \to 0$

Αν $a > 0$ τότε $\frac{a^n}{n!} \to 0$. Εδώ $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.

$a > 1$

Παίρνουμε το φυσικό αριθμό $k = \lceil 2a \rceil$.

Γράφουμε $\quad n \geq k+1$

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdots a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$$
$$= \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{a^{n-k}}{(k+1)(k+2)\cdots n} = \frac{a^k}{k!} \cdot \underbrace{\frac{a}{k+1}}_{\leq \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{a}{k+2}}_{\leq \frac{1}{2}} \cdots \underbrace{\frac{a}{n}}_{\leq \frac{1}{2}}$$
$$\leq \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}$$
$$= \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{1}{2^{n-k}} \to 0.$$

$\frac{1}{2^n} \quad 2^k$