Όριο συνάρτησης f σε ένα σημείο a

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Τι σημαίνει $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$;

«Το $f(x)$ είναι όσο κοντά θέλουμε στο L αρκεί το x να είναι αρκετά κοντά στο a.»

Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τ.ώ.

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

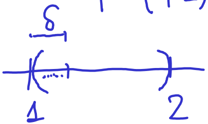
$f(a)$

Δε χρειάζεται να ορίζεται η f στο a.

x

$f : (1, 2) \to \mathbb{R}$

$\lim_{x\to 1} f(x) = 5$



Όριο συνάρτησης f σε ένα σημείο a: παραδείγματα

1) $f(x) = x, \ a = 2$

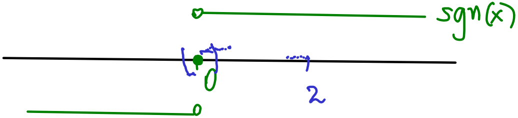
$\lim_{x\to 2} f(x) = 2$: Έστω $\epsilon>0$. Ψάχνω $\delta>0$ τ.ώ. Παίρνω $\delta=\epsilon$.

$|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-2|<\epsilon$

2) $g(x) = x^2, \ a = 1$

πρόσημο του x

3) $$\mathrm{sgn}\,(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x < 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \\ 1 & \text{αν } x > 0 \end{cases}, \quad a = 0, 2$$



$\lim_{x\to 2} \mathrm{sgn}(x) = 1$: $\epsilon>0$, $\delta=2$

$|x-2|<2 \Rightarrow x>0 \Rightarrow \mathrm{sgn}(x)=1 \Rightarrow \mathrm{sgn}(x)-1=0<\epsilon$

$\lim_{x\to 0} \mathrm{sgn}(x)$ δεν υπάρχει

$\epsilon=0.1$

$|L-1|<\epsilon$, $|L+1|<\epsilon$

$\lim_{x\to 1} x^2 = 1$

$\delta < 1/2$

Έστω $\epsilon>0$. Διαλέγουμε $\delta=\delta(\epsilon)$ τ.ώ.

$|x-1|<\delta \Rightarrow |x^2-1|<\epsilon$ ✓

$< 1/2$

$|x-1|\cdot|x+1|<\epsilon$

$1/2 < x < 3/2$

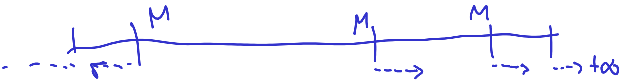
$3/2 < |x+1| < 5/2$

$|x-1| \frac{5}{2} < \epsilon \Leftarrow |x-1| < \frac{2\epsilon}{5}$

δ

Άπειρο όριο συνάρτησης f σε ένα σημείο a

$L \in \mathbb{R}$ $|x-L|<\epsilon$ $+\infty$



Τι σημαίνει $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$;

$a \in \mathbb{R}$

«Η τιμή $f(x)$ είναι όσο κοντά θέλουμε στο $+\infty$ αρκεί το x να είναι αρκετά κοντά στο a.»

$\delta(M)$

Για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ώ.

$$|x-a| < \delta \implies f(x) > M.$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty : \quad \forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \implies f(x) < M$$

Άπειρο όριο συνάρτησης f σε ένα σημείο a: παραδείγματα

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a = 0$

2) $g(x) = \frac{1}{x}$, $a = 0$

$f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

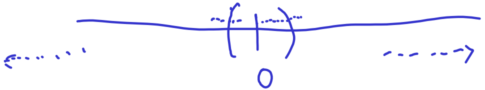
Έστω $M>0$. Βρείτε δ: $|x|<\delta \Longrightarrow \frac{1}{x^2} > M$

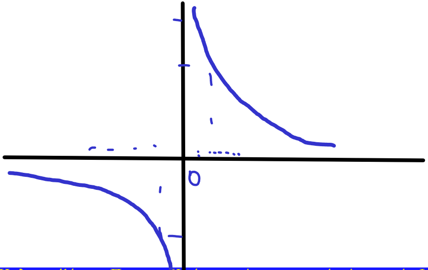
$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{M} > x^2$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{M}} > |x|$$

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει





$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

$M>0$ $\quad \delta = \frac{1}{M}$: $|x|<\delta = \frac{1}{M} \Rightarrow$

$M < \frac{1}{|x|}$

Όρια συνάρτησης f όταν $x \to \pm\infty$

Τι σημαίνει $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$;

Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τ.ώ.

$$x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

$x > 1$

$x > 1$

$\frac{1}{x} < 1$, $2 - \frac{1}{x} < 2$

Παράδειγμα: $f(x) = \dfrac{1}{2-\frac{1}{x}}$, $L = \dfrac{1}{2}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2-\frac{1}{x}} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{\cancel{2} - \cancel{2} + \frac{1}{x}}{2\left(2-\frac{1}{x}\right)}\right| \le \frac{\frac{1}{x}}{2} = \frac{1}{2x} < \epsilon$$

$$x > \frac{1}{2\epsilon} \implies \left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$$

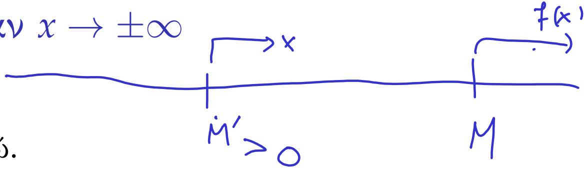
M

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

$M = -\frac{1}{4\epsilon}$ 0 M

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{\frac{1}{x}}{2\left(2-\frac{1}{x}\right)}\right| \le \left|\frac{1}{4x}\right| = \frac{-1}{4x} < \epsilon \iff \frac{-1}{4\epsilon} > x$$

Άπειρα όρια συνάρτησης f όταν $x \to \pm\infty$



Τι σημαίνει $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

Για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει $M' \in \mathbb{R}$ τ.ώ.

$$x > M' \implies f(x) > M.$$

Παράδειγμα: $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Αν $M>0$ θέλω $M'>0$:

$$x > \underset{M^2}{\underset{\parallel}{M'}} \implies \sqrt{x} > M \Longleftrightarrow x > M^2$$

Άπειρα όρια συνάρτησης f όταν $x \to \pm\infty$: παραδείγματα

(α) $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$x \to +\infty$

$x^2 > M \Leftarrow x < \underbrace{-\sqrt{M}}_{M'}$

$-\sqrt{M}$ M

(β) $\lim_{x\to+\infty} \lfloor x^2 \rfloor = +\infty$

$\lfloor x^2 \rfloor \geq x^2 - 1$

Θέλω $\lfloor x^2 \rfloor > M$

αρκεί $x^2 - 1 > M$

$x^2 > M$

$x > \underbrace{\sqrt{M}}_{M'}$

$e = \lim (1+1/n)^n > 1$

(γ) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$(1+x)^n \geq 1 + nx$ $\quad x \geq -1$

$e^x \geq e^{\lfloor x \rfloor} = (1+(e-1))^{\lfloor x \rfloor}$

$\geq \lfloor x \rfloor \underbrace{(e-1)}_{>0} > M \Leftarrow \lfloor x \rfloor > \frac{M}{e-1}$

$x > \underbrace{\frac{M}{e-1} + 10}_{M'}$

(δ) $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

$e^{-x} < \varepsilon \Leftarrow x > M''$

$e^x > \frac{1}{\varepsilon} \Leftarrow x > M''$

$\frac{1}{\varepsilon} = M$

$e^x > \frac{1}{\varepsilon} \Leftarrow x > \underbrace{\frac{1/\varepsilon}{e-1} + 10}_{M''}$

Πλευρικά όρια συνάρτησης σε ένα σημείο

Τι σημαίνει $\lim_{x\to a^+} \underline{f(x)} = \underline{L} \in \overline{\mathbb{R}}$;

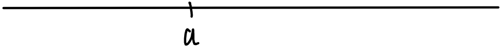
$x \to a^+$

$x \to a^-$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$



$L \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad a < x < a + \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad a - \delta < x < a \implies |f(x) - L| < \epsilon \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

$L = \pm\infty$

$$M < \frac{1}{x} \iff 0 < x < \frac{1}{M} = \delta$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \underline{+\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Ιδιότητες ορίων

$F \qquad G \qquad \underline{\underline{a \in \mathbb{R}}}$

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \underbrace{\lim_{x\to a} f(x)}_{=F} + \underbrace{\lim_{x\to a} g(x)}_{=G}$$ όταν τα όρια δεξιά υπάρχουν.

Απόδειξη: $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = F+G$ $\qquad |f(x)+g(x)-F-G| < \epsilon$ αρκεί $|x-a|<\delta$

$$|f(x)+g(x)-F-G| = |f(x)-F+g(x)-G| \overset{\text{τριγ. αν.}}{\le} |f(x)-F| + |g(x)-G| < \epsilon$$

$|f(x)-F| < \epsilon/2$, $|g(x)-G| < \epsilon/2$

$\lim_{x\to a} f(x) = F$: $\exists \delta_1 : |x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-F| < \epsilon/2$ ✓ (*)

$\lim_{x\to a} g(x) = G$: $\exists \delta_2 : |x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-G| < \epsilon/2$ ✓ (**)

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$|x-a| < \delta$ $\begin{matrix} \le \delta_1 \\ \le \delta_2 \end{matrix}$ $\Longrightarrow$ (*), (**)

Ιδιότητες ορίων (συνέχεια)

υπάρχουν

Ομοίως:

$$\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \text{ όταν } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0.$$

Διάφοροι υπολογισμοί ορίων

$a \in \mathbb{R}$ $\quad g(x) = x^k = \underbrace{x \cdots x}_{k} \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} x \cdot \ldots \cdot \lim_{x\to a} x$

$= \underbrace{a \cdots a}_{k} = a^k$

$g(x) = x^k$, $x \to a \in \overline{\mathbb{R}}$ για $k = 0, 1, 2, \ldots$

$\lim_{x\to a} x = a$

$\lim_{x\to+\infty} x^k \overset{x\geq 1}{=} +\infty$

$x \geq 1$: $x^k \geq x \to +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & k \text{ άρτιο} \\ -\infty & k \text{ περιττό} \end{cases}$

$f(x) \cdot g(x)$, $f(x) \to -\infty$, $g(x) \to -\infty$, $f(x) \cdot g(x) \to +\infty$

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, $g(x) \geq f(x)$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$

$f(x) = 1/x$, $x \to a \in \overline{\mathbb{R}}$ ✓

$h(x) = x^k$, $x \to a \in \overline{\mathbb{R}}$ για $k \in \mathbb{Z}$

$k = -1, -2, \ldots$

ρητή συνάρτηση

$x \to +\infty$

$$r(x) = \frac{p_k x^k + p_{k-1}x^{k-1} + \cdots + p_1 x + p_0}{q_r x^r + q_{r-1}x^{r-1} + \cdots + q_1 x + q_0}, \quad x \to \pm\infty.$$

$$= \frac{p_k x^{k-r} + p_{k-1} x^{k-r-1} + \ldots + p_0 x^{-r}}{q_r + q_{r-1}\frac{1}{x} + q_{r-2}\frac{1}{x^2} + \ldots + q_0 \frac{1}{x^r}}$$

$$\left[\ldots \right] = x^{k-r}\left(p_k + p_{k-1}\frac{1}{x} + p_{k-2}\frac{1}{x^2} + \ldots + p_0 \frac{1}{x^k}\right)$$

$\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{x}$

$a \in \mathbb{R}$

$a=0$ δεν υπάρχει

$a \neq 0$ $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x}$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

$\lim\limits_{x\to a} x^k \underset{\boxed{k\in\mathbb{Z},\ k<0}}{=} \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{x^{-k}} = \frac{1}{a^{-k}} = a^k$

$a \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$

$a=0$ $\lim\limits_{x\to 0} x^k = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{-k}}$

$\lim\limits_{x\to 0} x^{\overbrace{-k}^{2,3}} = 0$

$x^{-k} > 0$

k άρτιος

όριο $= +\infty$

k περιττός

όριο δεν υπάρχει

$$r(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{-7x^3 + 8x^2 - 1} =$$

$x \to +\infty$

$$= \frac{3\frac{1}{x} - 5\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x^3}}{-7 + 8\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}\overbrace{\left(\boxed{3} - 5\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x^2}\right)}^{\to 3}}{\underbrace{\boxed{-7} + 8\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}}_{\to -7}} \to 0$$