Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς. Αν έχετε πρόβλημα να λύσετε κάποια άσκηση ζητήστε βοήθεια στο Forum του μαθήματος. Οι λύσεις θα δημοσιεύονται 1-2 βδομάδες μετά από την ανάρτηση του κάθε Φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Όταν αποδείξαμε ότι μια αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία x_n συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό χρησιμοποιήσαμε το ότι υπάρχει *ελάχιστο άνω φράγμα* της ακολουθίας.

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα άνω φράγμα x της x_n που κανένα άλλο άνω φράγμα δεν είναι μικρότερό του.

Με άλλα λόγια, αν ονομάσουμε B το σύνολο όλων των άνω φραγμάτων της ακολουθίας x_n

$$z \in B \iff \text{το } z \text{ είναι άνω φράγμα της } x_n$$

τότε το σύνολο B έχει *ελάχιστο στοιχείο*, υπάρχει δηλ. $x \in B$ τέτοιο ώστε

$$z \in B \implies x \le z.$$

(Δηλ. κάθε άλλο στοιχείο του B είναι μεγαλύτερο ή ίσο του x.)

Δεν έχουν όλα τα σύνολα πραγματικών αριθμών ελάχιστο στοιχείο. Για παράδειγμα το ανοιχτό διάστημα $(1, 2)$ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Όποιο στοιχείο $x \in (1, 2)$ και να πάρουμε υπάρχει κάποιο άλλο $y \in (1, 2)$ που να είναι μικρότερο του x (π.χ. $y = (1 + x)/2$, το μέσο του διαστήματος $(1, x)$).

Ποια από τα παρακάτω σύνολα έχουν ελάχιστο στοιχείο και ποιο είναι αυτό;

(1) $A = \left\{\frac{1}{n} :\ n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$ (το σύνολο δηλ. όλων των αντιστρόφων των φυσικών αριθμών).
(2) $B = \{x \in \mathbb{R} :\ x \ge 0\}$ (οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί).
(3) $C = \{x \in \mathbb{R} :\ x > 0\}$ (οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί).

2. Αποδείξτε ότι

$$(a)\ \lim_{x\to\infty} \lfloor 1/x \rfloor = 0,\ (b)\ \lim_{x\to-\infty} \lfloor 1/x \rfloor = -1,\ (c)\ \lim_{x\to\infty} \lceil 1/x \rceil = 1,\ (d)\ \lim_{x\to-\infty} \lceil 1/x \rceil = 0.$$

3. Υποθέστε ότι $f(x) \ne 1$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f και ας είναι $z \in \mathbb{R}$ ένα σημείο που προσεγγίζεται από τα σημεία του πεδίου ορισμού της f. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to z} f(x) = 2 \iff \lim_{x\to z} \frac{f(x) + 3}{f(x) - 1} = 5.$$

4. Υπολογίστε τα όρια

$$(a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor 2x \rfloor}{x},\ \ (b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{x} \rfloor}{x},\ \ (c)\ \lim_{x\to 0+} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

5. (a) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$ δείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ τ.ώ. αν $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ και $x \ne a$ τότε $f(x) < g(x)$.

(b) Αν υποθέσουμε απλά ότι $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$ δείξτε ότι δε μπορούμε από αυτό να συμπεράνουμε ότι $f(x) \le g(x)$ σε κάποιο διάστημα γύρω από το a.