Απειροστικος Λογισμος Ι – Φθινοπωρο 2020-21

Λύσεις των ασκήσεων

---

1. Αποδείξτε με επαγωγή ως προς n τον τύπο

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1). \tag{1}$$

Λύση: Πρώτα ελέγχουμε ότι ο τύπος ισχύει για $n=1$, πράγμα πολύ απλό.

Έπειτα υποθέτουμε την $1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ και αποδεικνύουμε την ίδια πρόταση για $n+1$ δηλ. την ισότητα

$$1+2+3+\cdots+n+n+1 = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Αυτό γίνεται προσθέτοντας και στα δύο μέλη της (1) το $n+1$ και κάνοντας πράξεις στο δεξί μέλος.

---

2. Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(2+\frac{1}{n}\right)^4, \quad b_n = \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+2^{n+1}}, \quad c_n = \frac{1}{\frac{1}{n}+2^{-n}}, \quad d_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}.$$

Λύση: $a_n \to 16 = 2^4$ αφού αυτό που είναι υψωμένο στην 4η δύναμη πάει στο 2.

Για την b_n διαιρούμε με το μεγάλο όρο στον παρανομαστή, το 3^{n+1}, και παίρνουμε

$$b_n = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$$

Ο αριθμητής τείνει στο 1/3 και ο παρανομαστής στο 1, άρα $b_n \to \frac{1}{3}$.

$c_n \to +\infty$ αφού ο παρανομαστής τείνει στο 0 από θετικές τιμές.

Εύκολα μπορούμε να δούμε με επαγωγή ότι $d_n = 1-\frac{1}{2^n}$, άρα $d_n \to 1$.

---

3. Αν γνωρίζετε ότι $a_n \to a \in \mathbb{R}$ και ότι η a_n ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{2^n}, \tag{2}$$

για $n \ge 2$, βρείτε το όριο a.

Λύση: Παίρνοντας όρια στην (2) παίρνουμε $a = \frac{1}{2}a+0$, άρα $a=0$.

---

4. Βρείτε το όριο της

$$a_n = \frac{1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n}{1+3+3^2+3^3+\cdots+3^n}.$$

Λύση: Έχουμε

$$0 \le a_n \le \frac{(2n)2^n}{3^n}.$$

αφού $n/a^n \to 0$ αν $a>1$ έχουμε στη συνέχεια αν επιλέξουμε κάποιο αριθμό $\beta \in (2,3)$ (π.χ. $\beta = 2.5$)

$$0 \le a_n \le \frac{2n}{(3/\beta)^n}\cdot\left(\frac{2}{\beta}\right)^n$$

το οποίο τείνει στο 0 αφού και οι δύο παράγοντες τείνουν στο 0. Άρα $a_n \to 0$.

---

5. Δείξτε ότι $(n+1)^{1/3}-n^{1/3} \to 0$.

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

Λύση: Εφαρμόζουμε την υπόδειξη με $a=(n+1)^{1/3}, b=n^{1/3}$ και έχουμε

$$(n+1)^{1/3}-n^{1/3} = \frac{(n+1)-n}{(n+1)^{2/3}+(n+1)^{1/3}n^{1/3}+n^{2/3}} \le \frac{1}{n^{2/3}} \to 0.$$

6. Δείξτε ότι $a_n = \frac{n!}{n^n} \to 0$.

Λύση:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdots n}\\
&\le \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots \lfloor n/2\rfloor}{\underbrace{n\cdot n\cdots n}_{\lfloor n/2\rfloor}}\\
&\le \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}}_{\lfloor n/2\rfloor}\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor n/2\rfloor}\\
&\le \left(\frac{1}{2}\right)^{n/3}\\
&\to 0.
\end{aligned}
$$

7. Έχουμε $x_1 > 0, x_2 > 0$ και για $n \ge 1$ έχουμε

(3) $$x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n.$$

Δείξτε ότι $\rho_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} \to 2$.

Βρείτε πρώτα μια αναδρομική σχέση που ικανοποιεί η ρ_n. Δε μπορείτε να δείξετε ότι η ρ_n είναι μονότονη αλλά μπορείτε να δείξετε ότι οι δύο υπακολουθίες της ρ_{2n} και ρ_{2n+1} είναι μονότονες, άρα και συγκλίνουσες (για να το κάνετε αυτό βρείτε μια αναδρομική σχέση που ικανοποιούν αυτές οι δύο υπακολουθίες). Βρείτε έπειτα τα όρια των ρ_{2n} και ρ_{2n+1} και παρατηρήστε ότι είναι και τα δύο ίσα με 2, άρα $\rho_n \to 2$.

Λύση: Διαιρούμε την (3) με x_n και παίρνουμε

$$\frac{x_{n+2}}{x_n} = \frac{x_{n+1}}{x_n} + 2,$$

άρα

$$\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}\cdot\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_{n+1}}{x_n} + 2,$$

ή

$$\rho_{n+1}\rho_n = \rho_n + 2,$$

το οποίο γράφουμε ως

(4) $$\rho_{n+1} = 1 + \frac{2}{\rho_n}.$$

Εφαρμόζοντας την (4) δύο φορές παίρνουμε

$$\rho_{n+2} = 1 + \frac{2}{\rho_{n+1}} = 1 + \frac{2}{1+\frac{2}{\rho_n}} = 3 - \frac{4}{\rho_n + 2}$$

μετά από λίγες πράξεις. Από την αναδρομική σχέση τώρα $\rho_{n+2} = 3 - \frac{1}{\rho_n+2}$, την οποία ικανοποιούν και η ρ_{2n} και η ρ_{2n+1}, παίρνουμε με επαγωγή ότι και οι δύο αυτές ακολουθίες είναι μονότονες. Το είδος της μονοτονίας (αύξουσα ή φθίνουσα) εξαρτάται από τις αρχικές τιμές x_1 και x_2. Ας κάνουμε ένα παράδειγμα για να φανεί ότι, π.χ. για την ακολουθία των περιττών δεικτών, όποια κι αν είναι η σχέση ανάμεσα στο ρ_1 και το ρ_3 αυτή διατηρείται και για το επόμενο ζεύγος ρ_3 και ρ_5 κλπ.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $\rho_1 \le \rho_3$. Τότε

$$\rho_1 + 2 \le \rho_3 + 2 \implies 3 - \frac{4}{\rho_1+2} \le 3 - \frac{4}{\rho_3+2} \implies \rho_3 \le \rho_5.$$

Οι δύο ακολουθίες λοιπόν ρ_{2n} και ρ_{2n+1} συγκλίνουν, επειδή είναι μονότονες.

Αν μια από αυτές τις δύο ακολουθίες έχει πεπερασμένο όριο $x \in \mathbb{R}$ τότε αυτό πρέπει να είναι το 2 αφού ικανοποιεί την εξίσωση

$$x = 3 - \frac{4}{x+2}$$

η οποία εύκολα βλέπουμε ότι έχει ρίζες τα -1 και 2, αλλά αφού $\rho_n \ge 0$ έπεται ότι το όριο είναι το 2.

Μπορεί όμως μια από τις ρ_{2n} και ρ_{2n+1} να έχει όριο $+\infty$. Όχι, γιατί από την $\rho_{n+1} = 1 + \frac{2}{\rho_n}$ που έχουμε δείξει (και η οποία, παρατηρήστε, συνδέει τις τιμές για άρτια n με τις τιμές για περιττά n) φαίνεται ότι αν $\rho_n \to \infty$ τότε $\rho_{n+1} \to 1$, που δε γίνεται γιατί έχουμε δείξει ότι αν το όριο είναι πεπερασμένο τότε είναι το 2. Άρα και οι δύο ρ_{2n} και ρ_{2n+1} έχουν πεπερασμένο όριο, αυτό είναι το 2, άρα και η ρ_n τείνει στο 2.