$$0 \leftarrow a_n = \frac{1}{n} \quad \text{n.x.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1} - a_n\right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1}$$

$$= \lim_{N \to \infty} \cancel{\frac{1}{2}} - \underbrace{\frac{1}{1}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{N+1}} - \cancel{\frac{1}{N}}$$

$$= \lim_{N \to \infty} -1 + \underbrace{\frac{1}{N+1}}_{\downarrow \, 0} = \underbrace{-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n$$

Ποιο είναι το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)};$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2})$$

αλλά αυτό δε μας δίνει τηλεσκοπική σειρά γιατί κάθε όρος συνδυάζεται με αυτόν 2 θέσεις μετά. Αν όμως σπάσουμε τη σειρά μας σε δύο κομμάτια, αυτό για περιττά k και για άρτια k, τότε θα πάρουμε δύο τηλεσκοπικές σειρές ως εξής:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2i}-\frac{1}{2i+2}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Ποια από τα παρακάτω καταχρηστικά ολοκληρώματα μη αρνητικών συναρτήσεων συγκλίνουν σε πραγματικό αριθμό;

$\underbrace{<\infty}$, $=+\infty$

- [ ] 1. $\displaystyle\int_{10}^{\infty} \underbrace{x^2}\underbrace{e^{-\sqrt{x}}}\,dx$
- [ ] 2. $\displaystyle\int_{10}^{\infty} \frac{1}{1+x^3}\,dx$
- [ ] 3. $\displaystyle\int_{10}^{\infty} \frac{1}{5+\ln x}\,dx$

$$\int_A^{\infty} \frac{dx}{x^a} < \infty \iff a > 1$$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$$

$\underline{\text{αρκεί} \quad f(x) \le \underline{g(x)}\,.\ \int g < \infty}$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = +\infty$$

$\underline{\text{αρκεί}} \quad f(x) \ge h(x),\ \int h = +\infty$

$$x^2 e^{-\sqrt{x}} < g(x)\,, \qquad \int_{10}^{\infty} g(x)\,dx < \infty$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \qquad \int_{10}^{\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}}\,dx = \int_{\sqrt{10}}^{\infty} y^4 e^{-y}\, 2y\,dy = 2\int_{\sqrt{10}}^{\infty} y^5 e^{-y}\,dy$$

$$\int_{\sqrt{10}}^{\infty} y^5 e^{-y}\,dy \le \int_{\sqrt{10}}^{\infty} e^{-y/2}\,dy \checkmark < \infty$$

$$y^5 e^{-y} \le e^{-y/2}$$

$$y^5 \le e^{y/2} \checkmark$$

$$\frac{y^5}{e^{y/2}} \to 0$$

$$\frac{1}{1+x^3} < \frac{1}{x^3} \checkmark$$

$$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{\ln x} = +\infty \Longleftarrow \int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$$

$$\frac{1}{\ln x} \ge \frac{1}{x} \iff 1 \ge \frac{\ln x}{x} \checkmark$$

$$\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$$

Ποια από τα παρακάτω καταχρηστικά ολοκληρώματα μη αρνητικών συναρτήσεων συγκλίνουν σε πραγματικό αριθμό;

- [ ] 1. $\int_{10}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2}\, dx \leq \int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^2} < \infty$

- [ ] 2. $\int_{10}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \leq \int_{10}^{\infty} e^{-x}\, dx = e^{-10}$

$e^{-x^2} \leq e^{-x} \Leftrightarrow 1 \leq e^{x^2-x}$

- [ ] 3. $\int_{10}^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx$

$\int \frac{\cos x}{x^2}\, dx$

$y = \ln x \quad dy = \frac{dx}{x}$

$$\int_{\ln 10}^{\infty} \frac{dy}{y} = +\infty$$

Στην απόδειξη ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει (τα μερικά αθροίσματά της δηλ. τείνουν στο $+\infty$) βρήκαμε ουσιαστικά κάποιο κάτω φράγμα για την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

$$\underbrace{1}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots \frac{1}{15}}_{\frac{1}{2}} \quad \frac{1}{16}$$

$\geq$

$C \ln N$

το οποίο τείνει στο $+\infty$ με το N.

Ποιο από τα παρακάτω είναι το κάτω φράγμα που βρήκαμε; Δεν το προσδιορίζουμε ακριβώς αλλά αγνούμε μια σταθερά, γι' αυτό εμφανίζεται το C μπροστά από την έκφραση που μπορεί να είναι οποιαδήποτε σταθερά.

Επιλέξτε ένα.

- ☐ 1. $S_N \geq CN$
- ☐ 2. $S_N \geq C\sqrt{N}$
- ☐ 3. $S_N \geq C \ln N$ ←
- ☐ 4. $S_N \geq C \ln^2 N$

N όροι στο μερικό άθροισμα $\frac{1}{N}$

$(1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^{\nu})$ N όροι

$N \sim 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{\nu}$

$N = 2^{\nu+1} - 1$

$\boxed{\nu = \ln N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a^n = \lim_{N\to\infty} \frac{a^{N+1}-1}{a-1} = \frac{1}{1-a} \qquad |a|<1$$

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{a^{N+1}-1}{a-1} \qquad (a \neq 1)$$

Ποιο είναι το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0.5^k;$$

$$a = 0.5 \qquad \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-0.5} = 2$$

Ποιο είναι το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{2^{j+1}}{3^j};$$

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{2^{j+1}}{3^j} = 2 \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j$$

$$= 2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j = \frac{8}{9} \, \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{8}{3}.$$

Ποιο είναι το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)};$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} \cancel{+ \cdots +}$$

$$= 1$$