Πόσο κάνει το ολοκλήρωμα

$-\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \lfloor 2\cos x \rfloor \, dx;$$

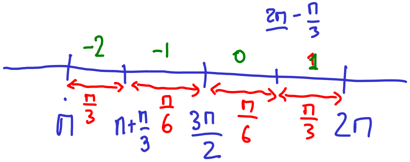
$\lfloor 2\cos x \rfloor = 0$

$0 \leq \cos x < \frac{1}{2}$

$\int \lfloor x^2 \rfloor dx$

$-2\frac{\pi}{3} - 1\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} =$

$= \pi\left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = \frac{-\pi}{2}$



$-1 \leq \cos x \leq 1$

$-2 \leq 2\cos x \leq 2$

$-2 \leq \lfloor 2\cos x \rfloor \leq 1$

$-2, -1, 0, 1$

$\lfloor 2\cos x \rfloor = -2$

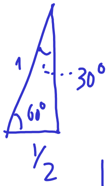
$-2 \leq 2\cos x < -1$

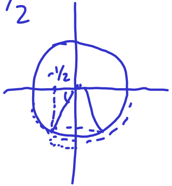
$-1 \leq \cos x < -1/2$

$\lfloor 2\cos x \rfloor = -1$

$-1 \leq 2\cos x < 0$

$-1/2 \leq \cos x < 0$





Η δυναμική ενέργεια ενός σωματίου στο χώρο δίνεται από τον τύπο

$$U = \frac{10}{r^2} - \frac{15}{r},$$

όπου $r > 0$ είναι η απόσταση του σωματίου από το 0.

Η *ελκυστική* δύναμη που ασκείται στο σωμάτιο αυτό προς το 0 είναι η

$$F = \frac{dU}{dr}.$$

Ποια είναι η μέγιστη τέτοια δύναμη που ασκείται στο σωμάτιο σε κάποια θέση;

Αριθμητική απάντηση με σχετική ακρίβεια 3 δεκαδικών και άνω. Αυτό σημαίνει ότι το σφάλμα πρέπει να είναι το πολύ το $\frac{1}{1000}$ της πραγματικής τιμής. Γενικά δεν έχετε κανένα λόγο να μη συμπληρώσετε όλα τα δεκαδικά ψηφία που θα υπολογίσετε.

$$F(r) = \left(10r^{-2} - 15r^{-1}\right)' = \underline{-20r^{-3} + 15r^{-2}}$$

$$F'(r) = 60r^{-4} - 30r^{-3} = 0$$

$$60 - 30r = 0$$

$$2 = r$$

$$F(2) = -20\frac{1}{8} + 15\frac{1}{4} = -2.5 + 4 - 0.25$$

$$= 1.25$$

Καταθέτουμε 100 ευρώ σε μια τράπεζα με επιτόκιο 10% το χρόνο. Η πολιτική της τράπεζας είναι ότι αν το ποσό που βρίσκεται στο λογαριασμό είναι πάνω από 1000 ευρώ τότε το επιτόκιο ανεβαίνει στο 20% (για όλο το ποσό, όχι μόνο για το ποσό παραπάνω από 1000 ευρώ). Υποθέτουμε επίσης ότι οι κανόνες της τράπεζας δεν αλλάζουν και ότι έχουμε συνεχή ανατοκισμό.

Σε πόσα χρόνια θα γίνει το ποσό μας 2000 ευρώ;

100 — 1000 — 2000

0 — T_1 — T_2

? ?

$$y(t) = e^{rt}\, \underset{\substack{\| \\ 100}}{y(0)} = e^{0.1t}\, 100$$

$$y(T_1) = 1000$$

$$e^{0.1t}\, 100 = 1000$$

$$e^{0.1t} = 10$$

$$0.1t = \ln 10 \Rightarrow t = \frac{\ln 10}{0.1} = 10 \ln 10 \approx 23.02585093$$

$$y(t) = e^{0.2t}\, 1000$$

$$2000 = e^{0.2t}\, 1000$$

$$e^{0.2t} = 2$$

$$0.2t = \ln 2 \Rightarrow t = 5 \ln 2 = 3.46573590$$

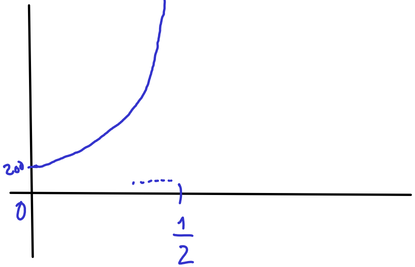
$y'(t) = r\,y(t)$ $\quad r = 0.1$

$\boxed{y'(t) = s\,y^2(t)}$ $\quad s = 0.01$

$\boxed{y(0) = 200}$

$y(t) = ?$

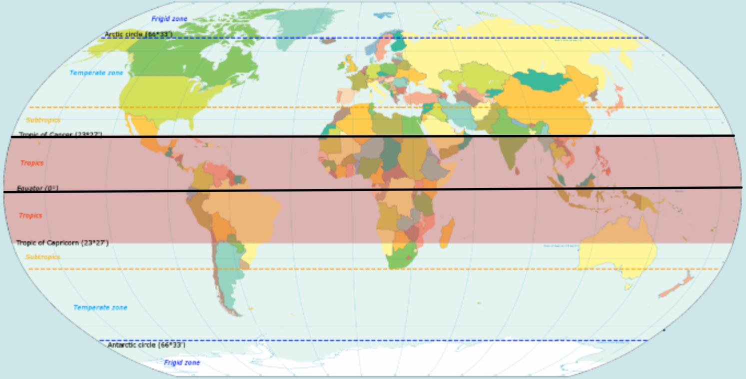
$\dfrac{5/1000}{1/100} = \dfrac{1}{2}$



$\Rightarrow \dfrac{y'(t)}{y^2(t)} = s \Rightarrow \left(\dfrac{1}{y(t)}\right)' = -s \Rightarrow \dfrac{1}{y(t)} = -st + C$

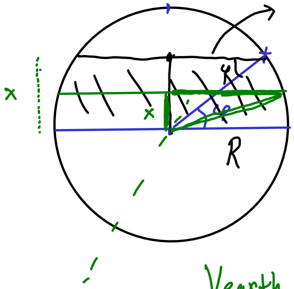
$\Rightarrow y(t) = \dfrac{1}{C - st} \Rightarrow y(t) = \dfrac{1}{0.005 - st} = \dfrac{1/s}{\frac{0.005}{s} - t} = \dfrac{100}{\frac{1}{2} - t}$

$C = 0.005$



Υποθέστε ότι

1. Η Γη είναι ακριβώς σφαιρική.
2. Ο Τροπικός του καρκίνου είναι σε γεωγραφικό πλάτος 23.5 μοίρες βόρεια.



$$V = \int_0^{R\cos 23.5^o} A(x)\,dx$$

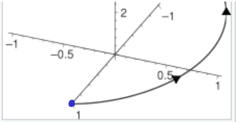
$A(x) =$ = εμβαδό της τομής της γης με το επίπεδο x από τον ισημερινό

$$V_{earth} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$\sqrt{R^2 - x^2}$ $\quad A(x) = \pi(R^2 - x^2)$

$$V = \int_0^{R\overbrace{\cos 23.5}^{\kappa}} \pi(R^2 - x^2)\,dx$$

$$= \int_0^{\kappa R} \pi R^2 - \pi x^2\,dx = \pi R^2 x - \pi\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\kappa R} = \frac{\cancel{\pi}\kappa \cancel{R^3} - \frac{\cancel{\pi}\kappa^3}{3}\cancel{R^3}}{\cancel{4/3\,\pi R^3}} \Bigg| \quad \frac{3}{4}\kappa - \frac{1}{4}\kappa^3$$



Η τριδιάστατη καμπύλη αυτή έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = \cos t,\quad y(t) = \sin t,\quad \underline{z(t) = t},$$

και ο χρόνος ξεκινά από το 0 (οπότε η καμπύλη ξεκινά από το σημείο (1, 0, 0)). Αν η καμπύλη κάνει n πλήρεις περιστροφές ποιο είναι το μήκος της; $T = 2n\pi$

Ο τύπος του μήκους καμπύλης για τριδιάστατες καμπύλες είναι τελείως ανάλογος με τον τύπο για τις διδιάστατες:

$$L = \int_{a = 0}^{b = 2n\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt, \quad = 2n\pi \cdot \sqrt{2}$$

όπου $[a, b]$ είναι το διάστημα που διανύει η παράμετρος t.

$x'(t) = -\sin t \qquad y'(t) = \cos t \qquad z'(t) = 1$

$$\underbrace{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}_{= |v(t)|} = \sqrt{2}$$

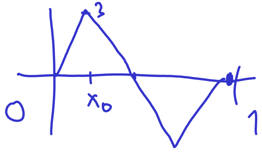
$$v(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

Η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς με αυτή την υπόθεση μόνο;

Πρέπει να τις επιλέξετε όλες και μόνο αυτές για να θεωρηθεί σωστή η ερώτηση.

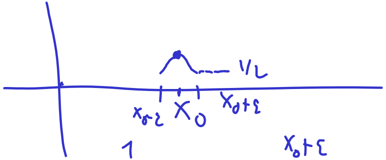
- [x] 1. Αν υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ με $f(x_0) \geq 1$ τότε $\int_0^1 f(x)\,dx \neq 0$. ✗
- [ ] 2. Αν υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ με $f(x_0) \geq 1$ τότε $\int_0^1 f^2(x)\,dx > 0$. ✓
- [ ] 3. $\int_0^1 e^{f(x)}\,dx \overset{>}{\neq} 0$. ✓



$f^2 \geq 0$

$f^2(x_0) > 0$

$e^{f(x)} > 0$



$$\int_0^1 f^2\,dx \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \tfrac{1}{2}\,dx \geq \varepsilon > 0$$

Η συνάρτηση $f:[2,6]\to[0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη με $f(2)=2$ και ικανοποιεί την ανισότητα

$$f'(x)\le\frac{4}{f(x)}$$

$2ff'\le 8$

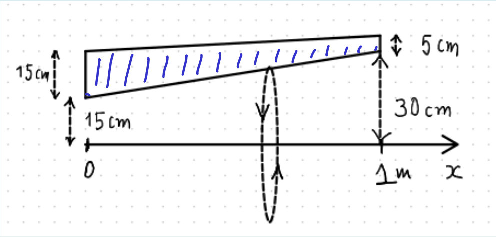
για κάθε $x\in[2,6]$.

$(f^2)'\le 8$

Ποια είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η τιμή $f(6)$;

$f^2(2)=4$

Ένα δοχείο είναι στερεό εκ περιστροφής. Τα τοιχώματά του προκύπτουν αν περιστραφεί γύρω από τον άξονα x το παρακάτω σχήμα.



Το εξωτερικό τοίχωμα του δοχείου προκύπτει αν περιστρέψουμε γύρω από τον x-άξονα την άνω ευθεία ενώ το εσωτερικό τοίχωμα προκύπτει από περιστροφή της κάτω ευθείας.

Να βρεθεί ο όγκος των τοιχωμάτων του δοχείου.

$$u(x) = 30 + 5 \cdot x \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$L(x) = 15 + 15 \cdot x$$

$$V = V_2 - V_1$$

$$V_2 = \int_0^1 \pi\, u^2(x)\, dx$$

$$V_1 = \int_0^1 \pi\, L^2(x)\, dx$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 30^2 + 300x + 25x^2\, dx = \pi\left(30^2 + 150 + \frac{25}{3}\right)$$

$$V_1 = \pi \int_0^1 15^2 + 2 \cdot 225 \cdot x + 15^2 x^2\, dx = \pi\left(15^2 + 225 + \frac{15^2}{3}\right)$$

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παντού παραγωγίσιμη και είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

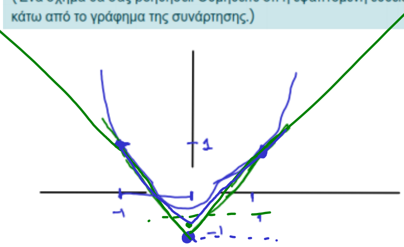
Επίσης έχουμε $f(-1) = f(1) = 1$ και $f'(-1) = -2$, $f'(1) = 2$.

Υπό αυτές τις υποθέσεις υπάρχουν κάποια $M \in \mathbb{R}$ τ.ώ.

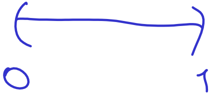
$$\textit{Για κάθε } x \in [-1, 1] \textit{ ισχύει } f(x) \geq M.$$

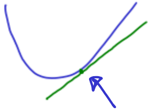
Ποιο είναι το μέγιστο τέτοιο M;

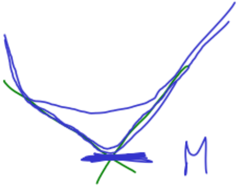
(Ένα σχήμα θα σας βοηθήσει. Θυμηθείτε ότι η εφαπτόμενη ευθεία σε μια κυρτή συνάρτηση είναι κάτω από το γράφημα της συνάρτησης.)

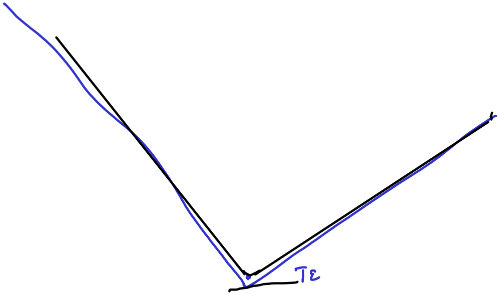


$M = -1$



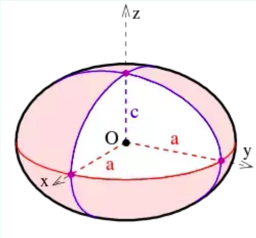






$M + \varepsilon$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο ενός *σφαιρικού ελλειψοειδούς:*



Η επιφάνεια του σχήματος αυτού είναι όλα τα σημεία του χώρου που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Θα υπολογίσουμε τον όγκο ολοκληρώνοντας το εμβαδό της τομής του ελλειψοειδούς αυτού με ένα οριζόντιο επίπεδο (παράλληλο δηλ με το επίπεδο xy) που ξεκινά από το ύψος $z=-c$ και φτάνει ως το ύψος $z=c$.

Αν ονομάσουμε t τη z-συντεταγμένη αυτού του επιπέδου ποιο είναι το εμβαδό της τομής του με το ελλειψοειδές; (Η τομή αυτή είναι πάντα κύκλος όπως φαίνεται από την εξίσωση παραπάνω σταθεροποιώντας το z).

$z=t$

$-c \le t \le c$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1-\frac{t^2}{c^2} \Rightarrow$$

$$x^2+y^2=a^2\sqrt{1-\frac{t^2}{c^2}}^{\,2}$$

$$R(t)=a\sqrt{1-\frac{t^2}{c^2}}$$

$$A(t)=\pi a^2\left(1-\frac{t^2}{c^2}\right)$$

$$V=\int_{-c}^{c}\pi a^2\left(1-\frac{t^2}{c^2}\right)dt=\pi a^2\left(t-\frac{t^3}{3c^2}\right)\Big|_{-c}^{c}$$

$\pi a^2\left(2c-2\frac{c}{3}\right)$

$=\frac{4}{3}\pi a^2 c$

$c=a$

$\frac{4}{3}\pi a^3$

Επιλέξτε όσα από τα παρακάτω είναι σωστά.

Select one or more:

- [ ] $n = O(n^2)$ ✓
- [ ] $n^2 = O(n)$ ✗
- [ ] $n = O(10n)$ ✓
- [ ] $10n = O(n)$ ✓
- [ ] $n + 1 = O(n)$ ✓
- [ ] $(n+1)^2 = O(n^2)$ ✓
- [ ] $e^{(n+1)^2} = O(e^{n^2})$ ✗

$$e^{n^2+2n+1} \le C e^{n^2}$$

$$e^{2n+1} \le C$$

$n \le C n^2$ $\qquad C = 1$

$n^2 \le C \cdot n \Rightarrow n \le C$

$n \le C\, 10n$ $\qquad C = 35$

$10n \le C \cdot n$ $\qquad C = 10$

$n+1 \le C \cdot n$ $\qquad \underline{C = 2}$

$n+1 \le 2n$

$1 \le n$

$(n+1)^2 \le C n^2$

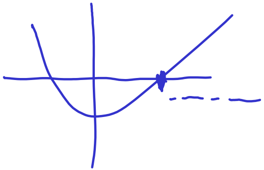
$C = 2$ $\qquad \underline{\underline{C = 10}}$

$n^2 + 2n + 1 \le 10 n^2$

$2n + 1 \le 9n^2$

$3n \le 9n^2$ $\qquad 1 \le 3n$

$+\, n^2 - 2n - 1 \ge 0$



Ποιο είναι το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)};$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{N \to \infty} S_N$$

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \underbrace{1 - \cancel{\frac{1}{2}}}_{k=1} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}}_{k=2} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}}_{k=3} + \ldots + \cancel{\frac{1}{N}} - \frac{1}{N+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \to \infty} 1$$

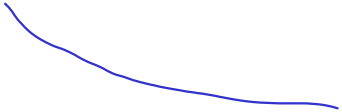
$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{a_n} \qquad \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-1} \qquad \underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}_{a_{n^2}} \longrightarrow e$$

$$n^{\frac{1}{3n}} \longrightarrow 1 \qquad \left(2^n\right)^{\frac{1}{3n}} \longrightarrow 2^{1/3} \qquad \left(n^n\right)^{\frac{1}{n}} = n \to +\infty$$

$$\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{3}} \longrightarrow 1^{\frac{1}{3}} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} = 0$$

$$\int_1^\infty e^{ax}\,dx < \infty$$

$a < 0$



$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}^{\,a}} < \infty$$

$a > 2$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^t} < \infty \iff \underline{\underline{t > 1}}$$