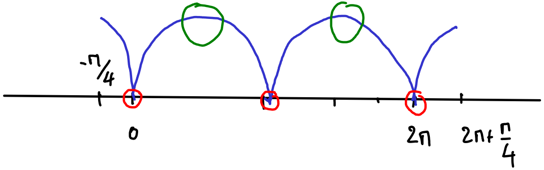
Πόσα τοπικά ακρότατα έχει η συνάρτηση $|\sin x|$ στο διάστημα $(-\pi/4, 2\pi + \pi/4)$;

Πόσα τοπικά ελάχιστα; 3

Πόσα τοπικά μέγιστα; 2

Δε μετράμε τα άκρα.



Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη παντού και $f(0)=0$. Η συνάρτηση f' είναι συνεχής. Επίσης για $0 \leq x \leq 5$ ισχύει

$$f'(x) \leq x.$$

Υπό αυτές τις υποθέσεις ποια είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το $f(5)$.

Αριθμητική τιμή με ακρίβεια 2 δεκαδικών.

$f(5) = f(5) - f(0) = 5 \cdot f'(\xi) \leq 5 \cdot \xi \leq 25$

ΘΜΤ $\quad 0 < \xi < 5$

$f(5) \leq 25$

Θεμελ.

$$f(5) = f(5) - f(0) = \int_0^5 f'(x)\,dx \leq \int_0^5 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^5 = \frac{25}{2}$$

$f(5) \leq \frac{25}{2}$

$f'(x) = x \quad , \quad f(x) = \frac{x^2}{2} + c$

$f(0) = 0 \implies c = 0$

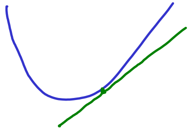
$f(x) = \frac{x^2}{2} \qquad f(5) = \boxed{\frac{25}{2}}$

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παντού παραγωγίσιμη και είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Επίσης έχουμε $f(-1) = f(1) = 1$ και $f'(-1) = -2$, $f'(1) = 2$.

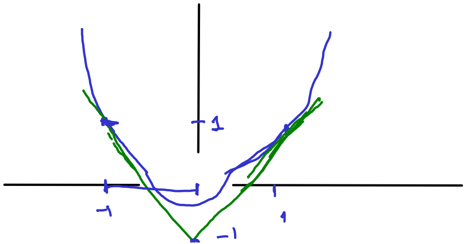
Υπό αυτές τις υποθέσεις υπάρχουν κάποια $M \in \mathbb{R}$ τ.ώ.

$$\text{Για κάθε } x \in [-1,1] \text{ ισχύει } f(x) \geq M.$$

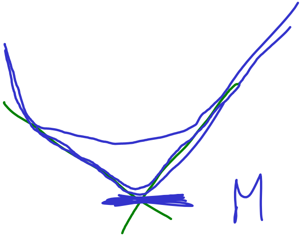


Ποιο είναι το μέγιστο τέτοιο M;

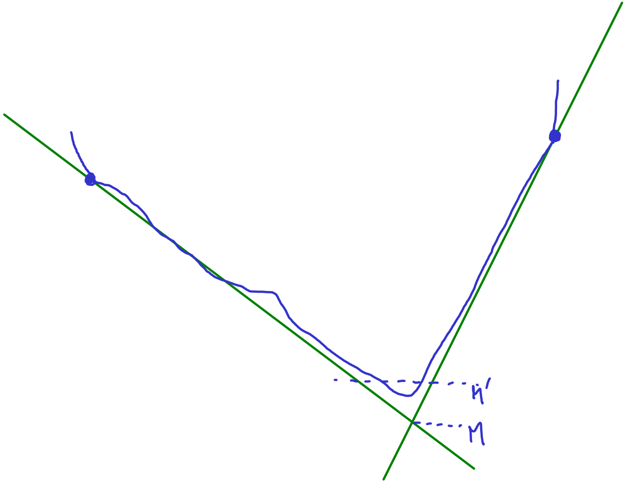
(Ένα σχήμα θα σας βοηθήσει. Θυμηθείτε ότι η εφαπτόμενη ευθεία σε μια κυρτή συνάρτηση είναι κάτω από το γράφημα της συνάρτησης.)



$M = -1$



M


M'
M

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

Θα πρέπει να επιλέξετε όλες τις σωστές και μόνο αυτές για να μετρήσει ως σωστή η άσκηση.

- [x] 1. $\int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{(n-1)^2}} \frac{dx}{x^2} \to 0$ για $n \to +\infty$.
- [x] 2. $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-1}} \frac{dx}{x} \to 0$ για $n \to +\infty$.
- [x] 3. $\int_{2^{-n^2}}^{2^{-n}} \frac{dx}{\sqrt{x}} \to 0$ για $n \to +\infty$.

$$\int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{(n-1)^2}} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{(n-1)^2}} = \underline{n^2 - (n-1)^2} =$$

$$= n^2 - n^2 + 2n - 1$$

$$= 2n - 1 \to +\infty$$

$$\ln x \Big|_{1/n}^{1/n-1} = \ln\frac{1}{n-1} - \ln\frac{1}{n} = \ln\frac{1/n-1}{1/n} = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \to \ln 1 = 0$$

$$\frac{n}{n-1} \to 1$$

$$2\sqrt{x}\Big|_{2^{-n^2}}^{2^{-n}} = 2\,2^{-n/2} - 2\,2^{-n^2/2} \to 0$$

Αν $p \geq 1$ τότε η ανισότητα Jensen μας δίνει, αν την εφαρμόσουμε στη συνάρτηση x^p, μια ανισότητα της μορφής

$x \geqslant 0$

$$(a+b)^p \leq C(a^p + b^p),$$

$$(x^p)' = p\,x^{p-1}$$

$$(x^p)'' = \underbrace{p(p-1)}_{\geqslant 0}\, x^{p-2}$$

για κάθε $a, b \geq 0$, όπου C είναι μια σταθερά που δεν εξαρτάται από τα a, b.

Ποια είναι η σταθερά C;

Η απάντησή σας είναι συνάρτηση του p.

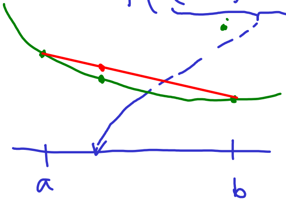
Jensen 1 Αν f κυρτή στο (c,d) και $a, b \in (c,d)$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

f (μέσος όρος) $\leq$ μέσο όρο (f)

Jensen 2 $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$f\big(\underbrace{(1-t)a + tb}\big) \leqslant (1-t)\,f(a) + t\,f(b)$$



$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p + b^p}{2} \Leftrightarrow (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

C;

Σωστό ή λάθος;

Η συνάρτηση $f(x) = \max\left\{\frac{1}{2}, x, x^2\right\}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \alpha\nu\ x \le -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ή } x \ge 1 \\ \frac{1}{2} & \alpha\nu\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{2} \\ x & \alpha\nu\ \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

$\frac{1}{2} \le x$

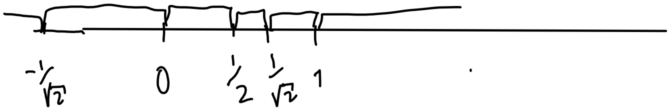
$x \le x^2$

$0 \le x(x-1)$

$\frac{1}{2} \le x^2 \Leftrightarrow$

$x \ge \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x \le -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\max\left\{\max\left\{\frac{1}{2}, x\right\}, x^2\right\}$$

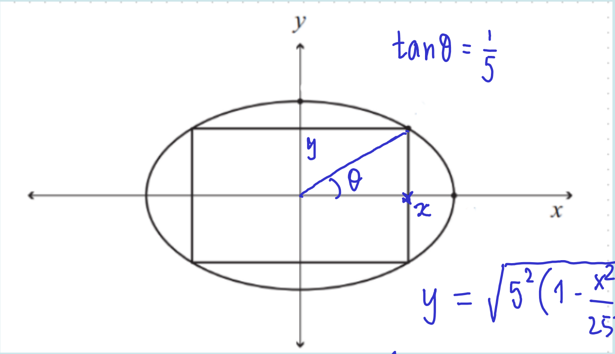


on 18

00 out

Σωστό ή λάθος;

Αν οι f, g είναι κυρτές σ' ένα διάστημα τότε και η συνάρτηση $\max\{f, g\}$ είναι κυρτ'η εκεί.



$\tan\theta = \frac{1}{5}$

$y = \sqrt{5^2\left(1 - \frac{x^2}{25^2}\right)}$

Στην έλλειψη με εξίσωση

$5^2x^2 + 25^2y^2 = 5^2\cdot 25^2 \Leftarrow \frac{x^2}{25^2}+\frac{y^2}{5^2}=1 \Rightarrow \frac{2x}{25^2}+\frac{2yy'}{5^2}=0$

$2\cdot\cancel{5^2}\,x^2 = \cancel{5^2}\cdot 25^2$

εγγράφουμε ένα ορθογώνιο παράλληλο με τους άξονες όπως φαίνεται στο σχήμα.

Ποιο είναι το μέγιστο εμβαδό του ορθογωνίου αυτού;

$x^2 = \frac{25^2}{2} \Rightarrow x = \frac{25}{\sqrt2},\quad y = \frac{5}{\sqrt2}$

$\Downarrow$

$2yy' = -\frac{5^2}{25^2}2x$

A(x) = εμβαδό ορθογωνίου που περνάει από το x

$A(x) = 4xy$

$\underbrace{4\,\frac{25}{\sqrt2}\,\frac{5}{\sqrt2} = 2\cdot5\cdot25}$

$\underbrace{A'(x) = 4y + 4xy'} = 0$

$2y^2 + 2xyy' = 0$

$2y^2 - 2\frac{5^2}{25^2}x^2 = 0$

$25^2y^2 = 5^2x^2$.

$25|y| = 5|x|$

3. Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $|f'| \le M$ παντού δείξτε ότι δύο αθροίσματα Riemann που αντιστοιχούν στην ίδια διαμέριση του $[a,b]$ διαφέρουν το πολύ κατά $M(b-a)\Delta$, όπου Δ είναι το πλάτος της διαμέρισης (το μήκος του μεγαλύτερου από τα διαστηματάκια της διαμέρισης).

$$\Delta = \max_{i=1,\dots,n} \{x_i - x_{i-1}\}$$

Λύση: Ας είναι

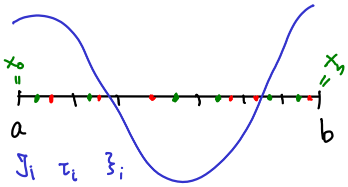
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

τα σημεία της διαμέρισης τα δύο αθροίσματα Riemann για τα οποία μιλάμε ας προκύπτουν με υπολογισμό της f στα σημεία $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ και $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ αντίστοιχα ($i = 1, 2, \ldots, n$). Τα δύο αθροίσματα Riemann είναι δηλ. οι αριθμοί

$$S_1 = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

και

$$S_1 = f(\zeta_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\zeta_n)(x_n - x_{n-1}).$$

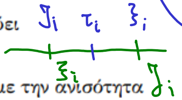


Άρα

$$|S_1 - S_2| = |(f(\xi_1) - f(\zeta_1))(x_1 - x_0) + \cdots + (f(\xi_n) - f(\zeta_n))(x_n - x_{n-1})|$$

(2) $$\le |(f(\xi_1) - f(\zeta_1))(x_1 - x_0)| + \cdots + |(f(\xi_n) - f(\zeta_n))(x_n - x_{n-1})|$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει σημείο τ_i ανάμεσα στα ξ_i και ζ_i τ.ώ. να ισχύει



$$f(\xi_i) - f(\zeta_i) = \pm f'(\tau_i)(\xi_i - \zeta_i)$$

(το $\pm$ επειδή δεν ξέρουμε ποιο από τα δύο σημεία ξ_i, ζ_i είναι μικρότερο από το άλλο). Άρα έχουμε την ανισότητα

$$|f(\xi_i) - f(\zeta_i)| \le M(x_i - x_{i-1}).$$

$$|(f(\xi_i) - f(\zeta_i))(x_i - x_{i-1})| \le M(x_i - x_{i-1})^2 \le M\Delta(x_i - x_{i-1})$$

Άρα

$$|(f(\xi_i) - f(\zeta_i))(x_i - x_{i-1})| \le M\Delta(x_i - x_{i-1}).$$

Αθροίζοντας αυτές τις ανισότητες για $i = 1, 2, \ldots, n$, έχουμε ότι η ποσότητα (2) φράσσεται από το ζητούμενο.

Ποιο είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

που στο 0 κάνει 0;

Η απάντηση είναι συνάρτηση του x.

$F(x) =$ -1/4*sqrt(1-4*x^2)+1/4

Display response

$$\frac{-1}{4}\sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{\underbrace{1-4x^2}_{y}}} dx = \frac{-1}{8}\int \frac{-8x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{-1}{8}\int \frac{dy}{y^{1/2}}$$

$$= \frac{-1}{8} \cdot 2y^{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{4} y^{1/2} =$$

$$= \frac{-1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C \overset{1/4}{=}$$

Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $y = 1-4x^2$ με $dy = -8x\,dx$ βρίσκουμε τη συνάρτηση $-\frac{1}{4}(1-4x^2)^{1/2} + C$. Πρέπει να επιλέξουμε $C = 1/4$ για να παίρνει την τιμή 0 στο 0.

The correct answer is: -1/4*(1-4*x^2)^(1/2)+1/4 giving

$$\frac{-1}{4}(1-4x^2)^{\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{4} \quad ||$$

Ποιο είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f(x) = \sin^5 x$$

που στο $\frac{\pi}{2}$ κάνει 0;

$$\int \sin^2 x \cdot \sin^2 x \underbrace{\sin x \, dx}_{d(-\cos x)}$$

$$= \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x \, dx = -\int (1-y^2)^2 dy$$

$y = \cos x$

$dy = -\sin x \, dx$

$$= -\int 1 + y^4 - 2y^2 \, dy$$

$$= -\left(y + \frac{y^5}{5} - 2\frac{y^3}{3}\right)$$

$$= -\cos x - \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2}{3}\cos^3 x + C$$

$C = 0$

Ποιο είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{1+\sin x}$$

που μηδενίζεται στο 0.

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x$$

Έχουμε

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x}\, dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx.$$

$$y = \cos x \implies dy = -\sin x\, dx$$

Με αλλαγή μεταβλητής $y = \cos x$ παίρνουμε

$$\tan x + \int \frac{dy}{y^2} = \tan x - \frac{1}{y} = \tan x - \frac{1}{\cos x} + C.$$

Η σταθερά C πρέπει να είναι +1 για να μηδενίζεται η συνάρτηση στο 0.

The correct answer is: tan(x)-1/cos(x)+1 giving

$$\tan(x) - \frac{1}{\cos(x)} + 1$$

Αν γνωρίζετε για τη συνάρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ ότι έχει 4η παράγωγο φραγμένη από το M ποιο είναι το μικρότερο σφάλμα που μπορείτε να εγγυηθείτε για το πολυώνυμο Taylor βαθμού 3 της $f(x)$ γύρω από το 0 υπολογισμένο στο σημείο $x=1/2$;

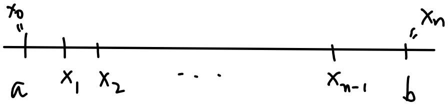
Η απάντηση είναι συνάρτηση του M.

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3}_{T(x)} + R(x)$$

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 = \frac{1}{2^4\cdot 24} f^{(4)}(\xi)$$

$$|R(x)| = \frac{1}{2^4\cdot 24}\left|f^{(4)}(\xi)\right| \le \frac{M}{2^4\cdot 24}$$

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases} = \mathbb{1}(x \in \mathbb{Q})$$



$$\underset{i=1,\dots,n}{\Delta = \max} \{x_i - x_{i-1}\}$$

πλάτος

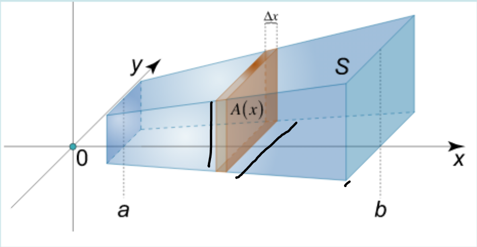
1) Ενδιάμεσα $\xi_i \in \mathbb{Q} \Rightarrow D(\xi_i) = 1$

$$\overbrace{\underbrace{D(\xi_1)}_{0}}^{1}(x_1 - x_0) + \overbrace{\underbrace{D(\xi_2)}_{0}}^{1}(x_2 - x_1) + \dots + \overbrace{\underbrace{D(\xi_n)}_{0}}^{1}(x_n - x_{n-1})$$

$= (b-a)$

2) Ενδιάμεσα $\xi_i \notin \mathbb{Q} \Rightarrow D(\xi_i) = 0$

Το στερεό σώμα που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα έχει τεμνόμενο με το επίπεδο κάθετο στον άξονα των x στο σημείο x τομή ένα ορθογώνιο με πλευρά παράλληλη με τον άξονα των y ίση με $\frac{3}{2}(x-a)+2$ και πλευρά παράλληλη με τον (κατακόρυφο) άξονα των z ίση με $\frac{5}{2}(x-a)+1$.



Ο όγκος του στερεού αυτού δίδεται ως ένα ολοκλήρωμα του εμβαδού της τομής, για όλο το εύρος των x που είναι το [a, b].

Αν λοιπόν ο όγκος είναι

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

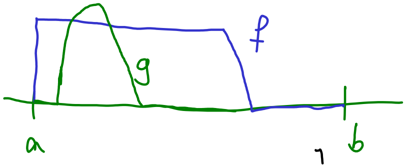
ποια είναι η συνάρτηση

$A(x) =$

$$A(x) = \left(\frac{3}{2}(x-a)+2\right)\left(\frac{5}{2}(x-a)+1\right)$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και ότι

$$\int_0^1 f(x)\,dx > \int_0^1 g(x)\,dx.$$

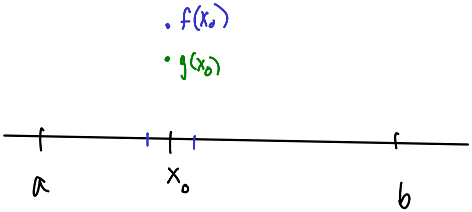


Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αναγκαστικά σωστές υπό αυτές τις υποθέσεις;

Select one or more:

1. Υπάρχει ένα $x_0 \in [0,1]$ τ.ώ. $f(x_0) > g(x_0)$.
2. Υπάρχει ένα διάστημα $I \subseteq (0,1)$ τ.ώ. για κάθε $x \in I$ ισχύει $f(x) > g(x)$
3. Για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $f(x) \geq g(x)$.

άρνηση $\longrightarrow$ $\underline{\forall x \in [0,1] \quad f(x) \leq g(x)} \Longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 g(x)\,dx$



$\underbrace{f(x)-g(x)}_{\text{συνεχής}}$ στο x_0 > 0

άρα $f(x)-g(x) > 0$ σε ένα ολόκληρο διάστημα γύρω από το x_0.