Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1) - \ln n)^a$$

συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό αν και μόνο αν

$a >$ 1

Αριθμητική απάντηση με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

$$\underbrace{\ln(n+1) - \ln n}_{= \frac{1}{\xi} \text{ για κάποιο } \xi \in [n, n+1]} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha} \leq \left(\frac{1}{\xi}\right)^{\alpha} \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$$

συγκλίνει σε πρ. αρ.

$\Updownarrow$

$\alpha > 1$

$$\underbrace{\sum \frac{1}{(n+1)^{\alpha}}}_{\alpha \leq 1 \Rightarrow \, = +\infty} \leq \sum (\ln(n+1) - \ln n)^{\alpha} \leq \underbrace{\sum \frac{1}{n^{\alpha}}}_{< \infty \Leftarrow \alpha > 1}$$

Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\ln(n+1) - \ln n)^a}_{f(n)}$$

συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό αν και μόνο αν

$a >$ ______

Αριθμητική απάντηση με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$$f(x) = \left(\ln(x+1) - \ln x\right)^{\alpha}$$

$\boxed{f \downarrow}$

$$\int_{10}^{\infty} f(x)\,dx$$

Περιστρέφοντας γύρω από τον άξονα των x το γράφημα της συνάρτησης $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ που δίνεται από τον τύπο

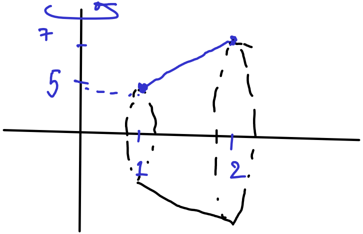
$$f(x)=2x+3 = y$$

παίρνουμε ένα στερεό εκ περιστροφής.

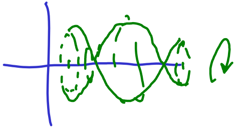
Ποιος είναι ο όγκος του;

$$2x = y-3$$

$$x = \frac{y}{2}-\frac{3}{2}$$



$$V=\int_1^2 \pi f^2(x)\,dx = \pi\int_1^2 4x^2+12x+9\,dx$$



$$=\pi\left(\frac{4x^3}{3}+6x^2+9x\right)\Big|_1^2 = \pi\left(\frac{32}{3}+24+18-\frac{4}{3}-6-9\right)$$

$$x=\varphi(y)=Ay+B \qquad \left.\begin{array}{l} 5A+B=1 \\ 7A+B=2 \end{array}\right\} \quad 2A=1 \Rightarrow A=1/2$$

$$5\cdot\frac{1}{2}+B=1 \Rightarrow B=-\frac{3}{2}$$

$$V'=\int_5^7 \pi\,\varphi^2(y)\,dy$$

Περιστρέφοντας γύρω από τον άξονα των x το γράφημα της συνάρτησης $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ που δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = 2x + 3$$

παίρνουμε ένα στερεό εκ περιστροφής.

Ποιος είναι ο όγκος του;

Αριθμητική απάντηση με ακρίβεια 2 δεκαδικών.

109/3*pi

One possible correct answer is: 114.14453308043

Ποια από τα παρακάτω καταχρηστικά ολοκληρώματα μη αρνητικών συναρτήσεων συγκλίνουν σε πραγματικό αριθμό;

- 1. $\int_{10}^{\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}}\,dx$ $= 2\int_{\sqrt{10}}^{\infty} y^5 e^{-y}\,dy$
- 2. $\int_{10}^{\infty} \frac{1}{1+x^3}\,dx$
- 3. $\int_{10}^{\infty} \frac{1}{5+\ln x}\,dx$

$\frac{x^n}{e^x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$

$x = y^2 \Leftarrow y = \sqrt{x}$

$\frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}} = \frac{y^4}{e^y}$

$dy = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\frac{dx}{y}$

$dx = 2y\,dy$

$\int y^5 e^{-y}\,dy = -\int y^5 (e^{-y})'\,dy$

$= -y^5 e^{-y} + 5\int y^4 e^{-y}\,dy$

$\int y^{100} e^{-y/1000}\,dy < \infty$

$\int e^{-y}\,dy < \infty$

Ποια από τα παρακάτω καταχρηστικά ολοκληρώματα μη αρνητικών συναρτήσεων συγκλίνουν σε πραγματικό αριθμό;

- 1. $\int_{10}^{\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}}\, dx$
- 2. $\int_{10}^{\infty} \frac{1}{1+x^3}\, dx < \infty$
- 3. $\int_{10}^{\infty} \frac{1}{5+\ln x}\, dx = \infty$

$$\int_{10}^{\infty} \frac{1}{1+x^3}dx \leq \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^3}dx < \infty$$

$$\boxed{\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} < \infty \iff \alpha > 1}$$

$$\int \frac{1}{\underline{5+\ln x}} \geq \int_{\cdot} \cdots \frac{1}{2\ln x} \geq \int \frac{1}{2}\frac{1}{x}dx = +\infty$$

$5 \nearrow \ln x$

$x \geq e^5$

$\ln x \leq x$

6. Αν $a_n \geq 0$, a_n φθίνουσα και

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

δείξτε ότι $a_n = o(1/n)$ (με άλλα λόγια δείξτε ότι $na_n \to 0$).

$f : [1, +\infty)$, $f \downarrow$, $f \geq 0$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$$

$$\Downarrow$$

$$x f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Λύση: Αφού συγκλίνει η σειρά έπεται ότι η ουρά της

$$T_N = \sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

τείνει στο 0

$$T_N \to 0.$$

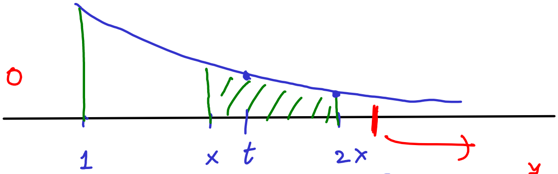
$n = N$ . .

Αλλά

$$T_N \geq \sum_{n=1}^{2N-1} a_n \geq 2Na_N$$

άρα $2Na_N \to 0$ που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

$$\int_x^{2x} f(t)\,dt = \underbrace{\int_1^{2x} f(t)\,dt}_{\downarrow \atop \int_1^{\infty} f(x)\,dx} - \underbrace{\int_1^{x} f(t)\,dt}_{\downarrow \atop \int_1^{\infty} f(x)\,dx} \to 0$$



$$0 \leftarrow \int_x^{2x} f(t)\,dt \geq \int_x^{2x} \underbrace{f(2x)}\,dt = \underbrace{\overset{y}{2x}\, f(\overset{y}{2x})}$$

Ουρά

$$T_N = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \quad : \quad \sum a_n \text{ συγκλίνει} \implies T_N \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

$$T(x) = \int_x^{\infty} f(t)\,dt \quad : \quad \int_1^{\infty} f(t)\,dt \text{ συγκλίνει} \implies T(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

$$= \int_1^{\infty} f(t)\,dt - \int_1^{x} f(t)\,dt \longrightarrow \int_1^{\infty} f(t)\,dt - \int_1^{\infty} f(t)\,dt = 0$$

Question 6

Not yet answered

Marked out of 2.00

Flag question

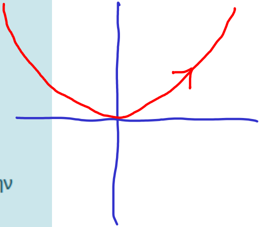
Edit question

Ένα σωμάτιο κινείται με τις παρακάτω παραμετρικές εξισώσεις κίνησης:

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^2, \qquad 2t$$

$x' = 1$ $\qquad y = x^2$

για $t \in \mathbb{R}$.



Αν $v(t)$ είναι το μέτρο της ταχύτητάς του τη χρονική στιγμή t δώστε ένα τύπο για την ποσότητα $v^2(t)$: $1 + 4t^2$ (συνάρτηση του t)

Ποια είναι η μέγιστη τιμή της ταχύτητας για $t \in [1, 2]$; $\sqrt{17}$
(Αριθμητική απάντηση με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.)

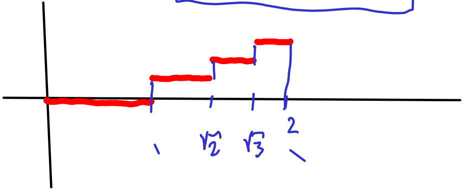
Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας για $t \in [1, 2]$; $\sqrt{5}$
(Αριθμητική απάντηση με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.)

$$v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \qquad v^2(t) = 1 + 4t^2$$

Πόσο κάνει το ολοκλήρωμα

$$\int_0^2 \lfloor x^2 \rfloor \, dx;$$

$0 \leq x^2 \leq 4$



$0 \leq x^2 < 1 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 0$

$0 \leq x \leq 1$

$1 \leq x^2 < 2 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 1$

$1 \leq x \leq \sqrt{2}$

$2 \leq x^2 < 3 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 2$

$\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}$

$3 \leq x^2 < 4 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 3$

$\sqrt{3} \leq x < 2$

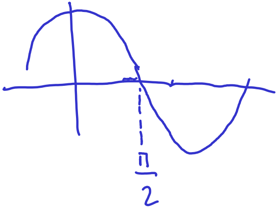
$$(\sqrt{2} - 1) \cdot 1 + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot 2$$

$$+ (2 - \sqrt{3}) \cdot 3 =$$

$$= \sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 6 - 3\sqrt{3}$$

$$= 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos^{-1}\frac{1}{n+1} - \cos^{-1}\frac{1}{n+2}$$



$$\sum_{n=1}^{N} \cdots = \cos^{-1}\frac{1}{2} - \cancel{\cos^{-1}\frac{1}{3}} + \cancel{\cos^{-1}\frac{1}{3}} - \cancel{\cos^{-1}\frac{1}{4}} + \cancel{\cos^{-1}\frac{1}{4}} - \cos^{-1}\frac{1}{5}$$

$$\cdots - \cos^{-1}\frac{1}{N+2}$$

$$= \cos^{-1}\frac{1}{2} - \cos^{-1}\underbrace{\frac{1}{N+2}}_{\to\, 0^+}$$

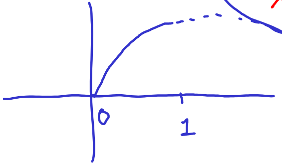
$$N \to \infty$$

Ερ. 8: Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{0+}^{1} \frac{dx}{(\sin x)^{1+\alpha}}$ είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν $\alpha < A$. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος από τους παρακάτω αριθμούς που είναι $\leq A$;

A: -0.5 B: -1 C: 1 D: 0

$\frac{\sin x}{x} \to 1$

$x \to 0$



$$\int_0^1 \frac{dx}{(\sin x)^{1+\alpha}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{(\sin x)^{1+\alpha}}$$

συγκλίνει

$\iff \alpha < 0$

$$\boxed{(\sin x)^{1+\alpha} \sim x^{1+\alpha}}$$

$1+\alpha \geq 0$

$|x| < \varepsilon$

$$\boxed{0.9x \leq \sin x \leq 1.1x}$$

$$0.9 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.1$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1+\alpha}} < \infty \iff$$

$1+\alpha < 1$

$\alpha < 0$

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός a τ.ώ. αν $t > a$ τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^{2t}}$$

να συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό;

$2t > 1$

$t > 1/2$

$a = 1/2$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} < \infty \iff \alpha > 1$$

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός a τ.ώ. αν $t > a$ τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^t x} = \int_{\ln 10}^{\infty} \frac{dy}{y^t} = \int y^{-t}$$

να συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό;

$y = \ln x \qquad dy = \frac{dx}{x}$

$t > 1$

$a = 1$

$$\frac{y^{-t+1}}{1-t} = \frac{(\ln x)^{1-t}}{1-t}$$

Σωστό ή λάθος;

Η παρακάτω σειρά συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left((k+1)^{1/2}-k^{1/2}\right) = \sum (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

$= a_k \downarrow 0$

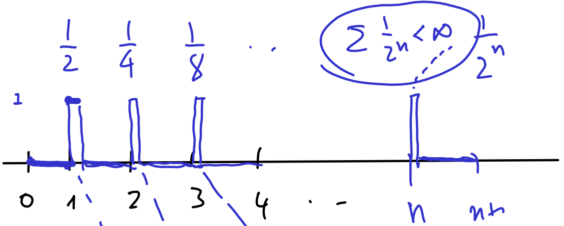
συγκλίνει

Select one:

$$\underbrace{a < \xi < b}_{} \Rightarrow \underbrace{a \leq \xi \leq b}_{}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tan(k+1) - \tan k$$

$$\int_a^b e^{-x^2}\,dx \quad \text{υπάρχει}$$

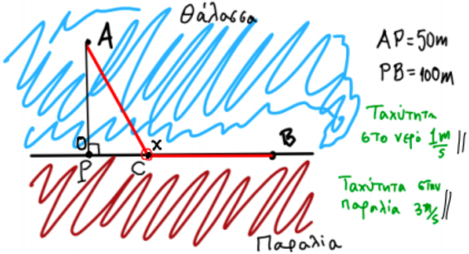


$$\int e^{-x^2}\,dx \quad 1/2 \quad 1/4 \quad 1/8$$

1

$$\boxed{f(x) \geq 0, \quad \int_1^\infty f(x)\,dx < \infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) \neq 0}$$

Βελτιστοποίηση: συντομότερη διαδρομή



Ποια η συντομότερη διαδρομή από το A στο B;

Βελτιστοποίηση: συντομότερη διαδρομή

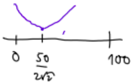
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Χρόνος διαδρομής ως συνάρτηση του $x = |PC|$:

$$f(x) = \sqrt{50^2 + x^2}/1 + (100 - x)/3,$$

με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{50^2 + x^2}} - \frac{1}{3}.$$



και

$$f'(x) = 0 \implies 3x = \sqrt{50^2 + x^2} \implies x = \frac{50}{2\sqrt{2}} = 17.677.$$

$$3x < \sqrt{50^2+x^2} \Leftarrow 9x^2 < 50^2+x^2 \Leftarrow 8x^2 < 50^2 \Leftarrow x^2 < \frac{50^2}{8} \Leftarrow x < \frac{50}{2\sqrt{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x}{\sqrt{50^2+x^2}} < \frac{1}{3} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ φθίνουσα πριν το } \frac{50}{2\sqrt{2}}$$