Απειροστικος Λογισμος Ι – Φθινοπωρο 2020-21

Λύσεις των ασκήσεων

---

1. Ας είναι $a_n \ge 0$.
Ισχύει ή όχι η συνεπαγωγή

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ln n < \infty;$$

Λύση: Όχι. Πάρτε ως παράδειγμα την ακολουθία $a_n = \dfrac{1}{n \ln^2 n}$.

---

2. Ας είναι $a_n \ge 0$ και $\epsilon > 0$.
Ισχύει ή όχι η συνεπαγωγή

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\epsilon} < \infty;$$

Λύση: Ναι. Αφού συγκλίνει η σειρά a_n έπεται ότι $a_n \to 0$ άρα τελικά $a_n < 1$ που συνεπάγεται ότι $a_n^2 \le a_n$ άρα η σειρά $\sum_n a_n^2$ επίσης συγκλίνει.

---

3. Ορίζουμε την ακολουθία

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Λύση: Ισχύει

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le a_n \le 1.$$

Άρα $a_n \to 1$.

---

4. Ας είναι

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό k ισχύει

$$\lim_{N\to\infty} S_{N+k} - S_N = 0.$$

Λύση: Έχουμε

$$0 \le S_{N+k} - S_N = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{N+k} \le \frac{k}{N} \to 0 \text{ για } N \to \infty,$$

άρα $\lim_{N\to\infty} S_{N+k} - S_N = 0$.

---

5. Υπολογίστε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n(n+2)}.$$

Λύση: Ακολουθώντας την υπόδειξη έχουμε για το γενικό όρο της σειράς

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right),$$

δηλ. η σειρά είναι τηλεσκοπική, άρα μένει ο πρώτος όρος

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

6. Αν $a_n \ge 0$, a_n φθίνουσα και

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

δείξτε ότι $a_n = o(1/n)$ (με άλλα λόγια δείξτε ότι $na_n \to 0$).

Λύση: Αφού συγκλίνει η σειρά έπεται ότι η *ουρά* της

$$T_N = \sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

τείνει στο 0

$$T_N \to 0.$$

Αλλά

$$T_N \ge \sum_{n=1}^{2N-1} a_n \ge 2Na_N$$

άρα $2Na_N \to 0$ που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

---

7. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2.$$

Για $n > 1$ έχουμε $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$.

Λύση: Έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 2 \text{ (τηλεσκοπική σειρά)} .$$

---

8. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \le 3.$$

(Θυμηθείτε ότι $0! = 1$.)

Λύση: Για $n \ge 2$ έχουμε $n! \ge n(n-1)$ άρα $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{n(n-1)}$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \le 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 2 + 1 = 3 \text{ (τηλεσκοπική σειρά)} .$$

Θα δούμε αργότερα ότι το άθροισμα της άνω σειράς είναι $e = 2.719\cdots$.

---

9. Αν $a_n \ge 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ δείξτε ότι

$$\sum_n \sqrt{a_n a_{n+1}} < \infty.$$

Δείξτε επίσης ότι δεν ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή.

Αν $x, y > 0$ τότε $4xy \le (x+y)^2$.

Λύση: Έχουμε, χρησιμοποιώντας την υπόδειξη $\sqrt{xy} \le \frac{1}{2}(x+y)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} a_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} a_n < \infty.$$

Για να δείξουμε ότι δεν ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή παίρνουμε την ακολουθία

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{αν } n \text{ άρτιο} \\ 0 & \text{αν } n \text{ περιττό.} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $a_n a_{n+1} = 0$ για κάθε n, οπότε η σειρά $\sum_n \sqrt{a_n a_{n+1}}$ συγκλίνει, ενώ η σειρά $\sum_n a_n$ δε συγκλίνει αφού ο γενικός όρος δεν πάει στο 0.