f συνεχής

$$f, w : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad w(x) \geq 0 \quad \left(\int_a^b w(x)\,dx > 0 \right)$$

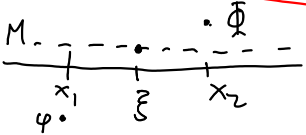
Μέσος όρος της f με συνάρτηση βάρους την w.

$\exists\, \xi \in [a,b]$

$$M = \frac{\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx} = f(\xi)$$

$$\Phi = \max_{[a,b]} f$$

$$\varphi = \min_{[a,b]} f$$



$$\varphi \leq M \leq \Phi$$

$$\exists\, x_1, x_2 : \quad f(x_1) = \varphi, \quad f(x_2) = \Phi$$

$$\int_a^b \underbrace{f(x)\,w(x)}\,dx \leq \underbrace{\Phi} \int_a^b \underline{w(x)}\,dx$$

$$f(x)\,w(x) \leq \Phi\, w(x)$$

$x_1, x_2, \dots, x_N$ ελαχ. $x_N \leq \cdot \leq$ μέγιστο x_N

Συνήθης μέσος όρος:

$$\frac{x_1+\dots+x_N}{N} = \frac{1}{N}x_1 + \frac{1}{N}x_2 + \dots + \frac{1}{N}x_N$$

Γενικ. μέσος όρος

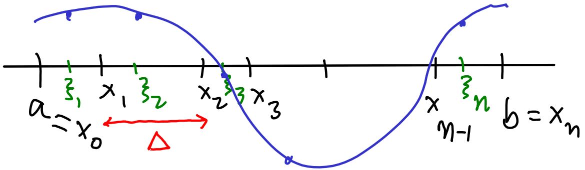
$$\boxed{\begin{array}{c} = w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_Nx_N \\ w_1+w_2+\dots+w_N = 1 \end{array}}$$

Μάθημα 2 διαγ. 1 τελ.

βαθμός: $30\%\, T_1 + 30\%\, T_2 + 40\%\, T_3$

$0.3 + 0.3 + 0.4 = 1$

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ x\ \rho\eta\tau\acute{o}\varsigma \\ 0 & \alpha\nu\ x\ \acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\varsigma. \end{cases}.$$



$$\circledast\ (x_1 - x_0)\underbrace{D(\xi_1)}_{1} + (x_2 - x_1)\underbrace{D(\xi_2)}_{1} + \dots + (x_n - x_{n-1})\underbrace{D(\xi_n)}_{1}$$

$$\Delta = \max_{i=1\dots n} (x_i - x_{i-1})$$

Όταν το $\Delta \to 0$ τότε $\circledast \longrightarrow I = \int_a^b f(x)\,dx$

Ποια είναι η τιμή που παίρνει οποιοδήποτε Riemann άθροισμα με **ρητά** ενδιάμεσα σημεία ξ_i;

$b - a$

Η απάντηση είναι συνάρτηση των a, b.

Και ποια είναι η τιμή που παίρνει οποιοδήποτε Riemann άθροισμα με **άρρητα** ενδιάμεσα σημεία ξ_i; 0

Η απάντηση είναι συνάρτηση των a, b.

Απαραίτητη ή αναγκαία συνθήκη

$$A \Longrightarrow B$$

βλέπω άστρα ... είναι νύχτα

Ικανή ή αρκετή συνθήκη

$$A \Longrightarrow B$$

νύχτα ⇒ άστρα

Εφαρμόστε τον κανόνα του L' Hopital για να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2} = 1 \quad = e^{L} \quad e^{-2}$$

$$\frac{\sin y}{y} \to 1 \quad y\to 0$$

e^{x} συνεχής

$$f(x) = e^{g(x)}$$

$$f(x) = (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} \quad x\to 0$$

$$g(x) = \ln f(x) = \frac{1}{x^2}\ln(\cos 2x)$$

$$= \frac{\ln(\cos 2x) \to 0}{x^2 \to 0}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = L = -2$$

$$\frac{\frac{1}{\cos 2x}\,(-\sin 2x \cdot 2)}{2x} = - \frac{\overbrace{\sin 2x}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}\ \underbrace{\cos 2x}_{\to 1}} = \overbrace{\frac{-1}{\cos 2x}}^{\to 1}\ \underbrace{\frac{\sin 2x}{x}}_{\to 2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{1} = 2$$

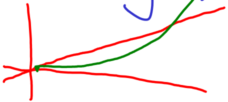
o O

$f(x) = O(g(x))$ όταν $x \to a$

$f(x) = o(g(x))$ όταν $x \to a$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq C$$ κοντά στο a

δηλ. σε κάποιο διάστημα $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$



$f(x) = 100x$

$g(x) = x^2$

$a = +\infty$

$100x = O(x^2)$

$$\frac{100x}{x^2} \leq 1$$ αρκεί το x κοντά στο ∞

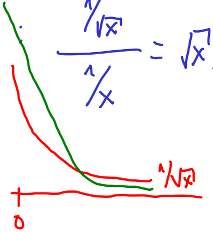
(αρκεί το x να είναι αρκετά μεγάλο)

$a = 0$ $(0, +\infty)$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = O\left(\frac{1}{x}\right) : \quad \frac{1/\sqrt{x}}{1/x} = \sqrt{x} \leq 1$$

$(0, 1)$



$f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

$f(x) = 100x, \quad g(x) = x^2, \quad a = +\infty$

$f(x) = O(g(x))$ $\qquad$ $\underline{f(x) = o(g(x))}$: $\dfrac{100x}{x^2} \xrightarrow{x\to\infty} 0$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x \to 0^+$

$\underline{f(x) = o(g(x))}$: $\dfrac{1/\sqrt{x}}{1/x} = \sqrt{x} \xrightarrow{x\to 0} 0$

$f(x) = \underline{o}(g(x)) \Longrightarrow f(x) = O(g(x))$

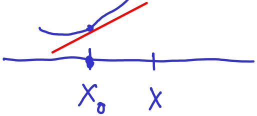
$f(x) = 100x$

$g(x) = x$

$x \to +\infty$

$\cancel{f(x) = o(g(x))}$

$f(x) = O(g(x))$

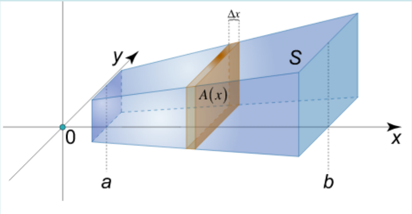


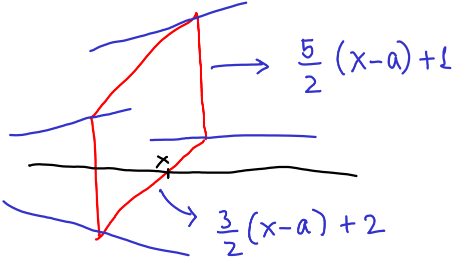
$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{T(x)} + o(x-x_0)$$

εφαπτόμενη του γραφήματος

σφάλμα $= o(x-x_0)$

Το στερεό σώμα που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα έχει τεμνόμενο με το επίπεδο κάθετο στον άξονα των x στο σημείο x τομή ένα ορθογώνιο με πλευρά παράλληλη με τον άξονα των y ίση με $\frac{3}{2}(x-a)+2$ και πλευρά παράλληλη με τον (κατακόρυφο) άξονα των z ίση με $\frac{5}{2}(x-a)+1$.





$$A(x) = \left(\frac{3}{2}(x-a)+2\right)\left(\frac{5}{2}(x-a)+1\right)$$

Ο όγκος του στερεού αυτού δίδεται ως ένα ολοκλήρωμα του εμβαδού της τομής, για όλο το εύρος των x που είναι το [a, b].

Αν λοιπόν ο όγκος είναι

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

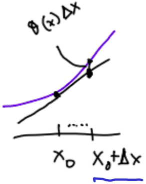
ποια είναι η συνάρτηση

$A(x) =$ ______

Η παράγωγος ως προσέγγιση

Δx

Ας πάρουμε $x \to x_0$ και ας γράφουμε $x = x_0 + \Delta x$ με $\Delta x \to 0$.



Από τον ορισμό της παραγώγου: $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$:

$x = x_0 + \Delta x$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \boxed{\theta(x)}, \quad \text{με } \boxed{\theta(x)\to 0} \text{ όταν } \Delta x \to 0.$$

Κάνοντας μερικές πράξεις έχουμε

$$f(x_0+\Delta x) = \underbrace{f(x_0)+f'(x_0)\Delta x}_{\text{εξίσωση εφαπτομένης}} + \overbrace{\theta(x)\Delta x}^{\to 0}$$

$\Delta x \to 0$

$\theta(x)\Delta x = o(\Delta x)$

πάει πιο γρήγορα στο 0

Συνήθως γράφουμε

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0)+f'(x_0)\Delta x + \boxed{o(\Delta x)}.$$

ο - μικρό

$A = o(B)$ όταν $x \to 0$ | $\frac{A}{B} \to 0$

$\frac{\theta(x)\Delta x}{\Delta x} = \theta(x) \to 0$

Έχουμε ένα βαρέλι που είναι ένας ορθός κυκλικός κύλινδρος με ακτίνα βάσης r και ύψος h. Το βαρέλι έχει πάτο αλλά όχι καπάκι. Αν θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια του βαρελιού (πάτος + το πλαϊνό κομμάτι) είναι σταθερό ποιος πρέπει να είναι ο λόγος r/h ώστε ο όγκος του βαρελιού να είναι ο μέγιστος;

Αριθμητική απάντηση με ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων.

$$A = \pi r^2 + 2\pi r \cdot h \checkmark$$

$$V = \pi r^2 \cdot h \quad \text{max}$$

$$2\pi r h = A - \pi r^2$$

$$h = \frac{A - \pi r^2}{2\pi r}$$

$$V = \pi r^2 \frac{A - \pi r^2}{2\pi r} = \frac{r(A - \pi r^2)}{2}$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow A - \pi r^2 + r(-2\pi r) = 0$$

$$\Leftrightarrow A - \pi r^2 - 2\pi r^2 = 0$$

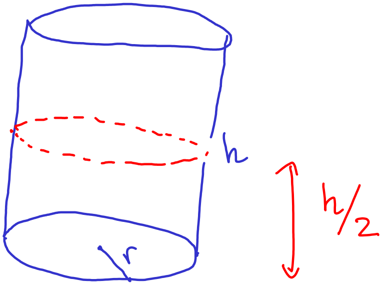
$$\Leftrightarrow A = 3\pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{3\pi}}$$

$$h = \frac{A - \cancel{\pi}\frac{A}{3\cancel{\pi}}}{2\pi\sqrt{\frac{A}{3\pi}}} = \frac{\frac{\cancel{2}}{3}A}{\cancel{2}\pi\sqrt{\frac{A}{3\pi}}} = \frac{\sqrt{3\pi}}{3\pi}\sqrt{A} = \sqrt{\frac{A}{3\pi}}$$

video 7.5

$h = 2r$

$$\frac{r}{h} = 1$$



$h = 2r$

$\frac{h}{r} = 2$

$\frac{h}{r} = 1$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{2/3}$ στο διάστημα $[-2, 3]$.

Ποιο είναι το ολικό της ελάχιστο; 0

Ποιο είναι το ολικό της μέγιστο; $9^{1/3}$

$(x^2)^{\frac{1}{3}}$ ἀρτια $f(-x) = f(x)$

$[0,3]$ $3^{2/3} = 9^{1/3}$

$[-2,0]$ $4^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2/3}{x^{1/3}}$$