Σωστό ή λάθος;

Αν $a_n \geq 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

$a_n \geqslant b_n \geqslant 0$

$\sum a_n < \infty \implies \sum b_n < \infty$

$$\underbrace{\sum_{1}^{\infty} a_n^2}_{} = \underbrace{\sum_{1}^{n_0} a_n^2}_{} + \underbrace{\sum_{n_0+1}^{\infty} a_n^2}_{}$$

$a_n^2 \leq a_n$ τελικά $(n \geqslant n_0)$

$x^2 \leq x$ αρκεί $x \in [0,1]$

$\sum a_n < \infty \implies a_n \to 0 \implies \exists n_0 : n \geqslant n_0 \implies a_n < 1$

Σωστό ή λάθος;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} < \infty$$

Χρησιμοποιήστε το κριτήριο του ολοκληρώματος.

Ορίζουμε

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

που είναι μη αρνητική και φθίνουσα για $x \geq 1$, όπως φαίνεται εύκολα με παραγώγιση. Το ερώτημά μας είναι αν

$$\sum_n f(n) < \infty.$$

Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

σύμφωνα με το κριτήριο του ολοκληρώματος.

Έχουμε τώρα, με την αλλαγή μεταβλητής $y = 1 + x^2$,

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{2x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_2^{\infty} \frac{dy}{y} = \infty,$$

$$\frac{1}{2}\int_2^{\infty} \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \lim_{M\to+\infty} \int_2^{M} \frac{dy}{y}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{M\to\infty} (\underbrace{\ln M}_{\downarrow \infty} - \ln 2)$$

$$= +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

$\shortparallel$

a_n

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Rightarrow a_n \to 0$

$\rightarrow$ σε πραγμ. αριθμό

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \xrightarrow[N\to\infty]{} S$$

$=$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_N$$

$$S_N = S_{N-1} + a_N$$

$S_1 = a_1 = -1$

$S_2 = a_1 + a_2 = -1 + 1 = 0$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$= S_2 + a_3 = -1$

$S_4 = S_3 + a_4 = -1 + 1 = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}_{b_n}$$

$b_1 + b_2 + \dots + b_N \simeq N \to +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \qquad a_n \geq 0 \text{ φθίνουσα} \downarrow 0 \implies \sum (-1)^n a_n \text{ συγκλίνει}$$

$$\cancel{< \infty}$$

$$\|$$

$$(a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \cdots$$

$$\quad \geq 0 \qquad \geq 0 \qquad \geq 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} - a_{2n+1}$$

θετ. όρους

$$S_N = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + a_4 - a_5 + \cdots + (-1)^N a_N$$

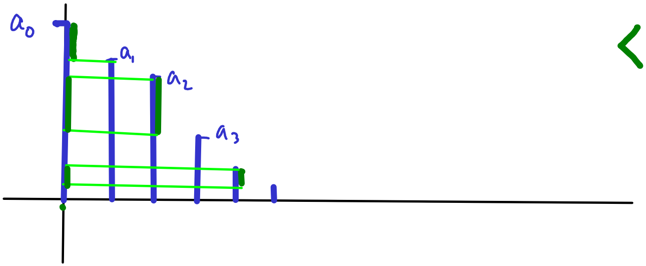
N περιττό:
$$S_N = \underbrace{(\quad)}_{\geq 0} + \underbrace{(\quad)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(\quad)}_{\geq 0} \xrightarrow[N \text{ περιττό}]{N \to \infty} S$$

N άρτιο
$$S_N = \underbrace{\underbrace{(\quad)}_{\geq 0} + \underbrace{(\quad)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(\quad)}_{\geq 0}}_{S_{N-1} \to S} + a_N \to S$$

$$a_N \to 0$$

$$(a_0 - a_1) + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots < \infty$$

$$< a_0$$



$$\sum (-1)^n a_n$$

$a_n \geq 0$ ✓ τελικά

$a_n \downarrow 0$

$$\frac{2x-3}{3x^2-5x+10} = f(x)$$

$$x \geq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-3 \to +\infty}{3n^2-5n+10 \to +\infty}$$

$$n \geq n_0$$

$$\sum_{n} \dots$$

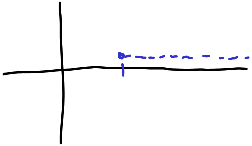
$$\frac{h = 2x-3}{g = 3x^2-5x+10} = f(x) \geq 0 \quad \text{τελικά}$$

$$f'(x) = \left(\frac{h(x)}{g(x)}\right)' = \frac{h'\cdot g - hg'}{g^2}$$

ρητή συνάρτηση

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

$x \geq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$



$f(x)$ τελικά μονότονη

$\Uparrow$

Αν P, Q πολυώνυμα τότε για $x \to +\infty$ το $\frac{P(x)}{Q(x)}$ έχει τελικά σταθερό πρόσημο.

$x \to \infty$

$\lim P(x) = p \in \overline{\mathbb{R}}, \; p \neq 0$

$\lim Q(x) = q \in \overline{\mathbb{R}}, \; q \neq 0$

πρόσημο $\frac{P}{Q}$ = πρόσημο $\frac{p}{q}$

$P(x) = -x+1 \to -\infty$

$Q(x) = x^2+2 \to +\infty$

$$\frac{-\infty}{+\infty} = -\infty$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$\sum (-1)^n \frac{2n-1}{3n^2-5n+10} = +\infty$$

$$\frac{2n-1}{3n^2-5n+10} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\overbrace{\frac{2n-1}{3n-5+\frac{10}{n}}}^{\to 2/3}}_{} \sim \frac{2}{3}\frac{1}{n}$$

$$\exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow \frac{2n-1}{3n-5+\frac{10}{n}} \geq \frac{1}{3}$$

$$\geq \frac{1}{3}\frac{1}{n}$$

$$\sum \frac{1}{3}\frac{1}{n} = +\infty$$

Στην απόδειξη ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει (τα μερικά αθροίσματά της δηλ. τείνουν στο $+\infty$) βρήκαμε ουσιαστικά κάποιο κάτω φράγμα για την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}$$

το οποίο τείνει στο $+\infty$ με το N.

Ποιο από τα παρακάτω είναι το κάτω φράγμα που βρήκαμε; Δεν το προσδιορίζουμε ακριβώς αλλά αγνοούμε μια σταθερά, γι' αυτό εμφανίζεται το C μπροστά από την έκφραση που μπορεί να είναι οποιαδήποτε σταθερά.

Επιλέξτε ένα.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} + \cdots$$

$2^0 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 8$

$$\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = +\infty$$

- 1. $S_N \geq CN$
- 2. $S_N \geq C\sqrt{N}$
- 3. $S_N \geq C \ln N$
- 4. $S_N \geq C \ln^2 N$

$$N = 2^k - 1 \Rightarrow 2^k = N+1$$

$$S_N = \boxed{}^{1} + \boxed{}^{2} + \boxed{}^{3} + \dots + \boxed{ k }$$

$n = 2^{k-1} \qquad 2^k - 1$

$$\geq \underbrace{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{k} = \frac{k}{2}$$

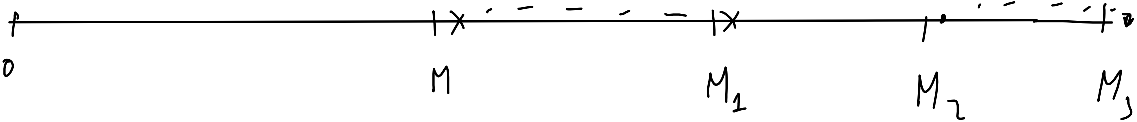
$$2^k = N+1$$

$$k \ln 2 = \ln(N+1) \Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{1}{2\ln 2} \ln(N+1)$$

$$S_N \geq \dots \qquad \frac{\ln (N+1)}{\ln N} \to 1$$

$\sum a_n = +\infty$ $\quad a_n \geq 0 \quad a_n \downarrow 0$

αρκεί να έχω ότι : $\forall M>0 \ \exists N: \ S_N \geq M$.



M βήματα μήκους 1 | βήμα 1/4

$(M_1-M)\cdot 2$ βήματα μήκους $\frac{1}{2}$

$(M_2-M_1)\cdot 3$ – – . $\frac{1}{3}$

Σωστό ή λάθος;

Η παρακάτω σειρά συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k}.$$

$x \to 0$ $\quad \frac{\sin x}{x} \to 1 \Longrightarrow \frac{\sin x}{x} > \frac{1}{2}$

αν $|x| < \delta$ ...

$\sin\frac{1}{k} \sim \frac{1}{k} \Longrightarrow \sum \sin\frac{1}{k} = +\infty$

(αφού $\sum \frac{1}{k} = +\infty$)

$\frac{1}{k} < \delta \Longrightarrow \exists k_0 : k \geq k_0 \Longrightarrow \frac{\sin\frac{1}{k}}{1/k} > \frac{1}{2} \Longrightarrow \sin\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}\frac{1}{k}$

$1-\varepsilon \quad 1 \quad 1+\varepsilon$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \sin\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty$$

$\varepsilon = 1/2 \Longrightarrow \frac{\sin x}{x} > \frac{1}{2}$

$$\sum \frac{2n+1}{3n^3+5n+5} < \infty$$

$$\frac{2n+1}{3n^3+5n+5} \leq \frac{3n}{3n^3} = \frac{1}{n^2}$$

$$\sum \frac{1}{n^2} < \infty$$

$$\sum \frac{2n+1}{3n^2-5n+5} = +\infty$$

$$\frac{2n+1}{3n^2+5n+5} \geq \frac{2n}{3n^2+5n^2}$$

$$= \frac{2n}{8n^2} = \frac{2}{8n}$$

$$\frac{2}{8}\sum \frac{1}{n} = +\infty$$

$$\frac{2n+1}{3n^2-5n+5} \geq \frac{2n}{3n^3} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{n^2}$$

$$\sum \frac{1}{n^2} < \infty$$

$$3n^2 - 5n + 5 \leq 4n^2$$

Tedıká

$$-5n + 5 \leq n^2$$

9.3.8. Βρείτε ακολουθία (b_n) ώστε να ισχύει $b_n > 0$ για κάθε n, ώστε $b_n \to 0$ και ώστε η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}b_n$ να αποκλίνει.

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$$

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \dots = +\infty$$

$$\frac{1}{1} \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2^2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3^2} \quad \frac{1}{4}$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & n = 2k+1 \\ \frac{1}{k^2} & n = 2k \end{cases} \dots$$

$$\sum b_n < \infty$$

$$\Longrightarrow \sum \frac{1}{k} \text{ συγκλίνει}$$