

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς. Αν έχετε πρόβλημα να λύσετε κάποια άσκηση ζητήστε βοήθεια στο Forum του μαθήματος. Οι λύσεις θα δημοσιεύονται 1-2 βδομάδες μετά από την ανάρτηση του κάθε Φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Ας είναι  $a_n \geq 0$ .

Ισχύει ή όχι η συνεπαγωγή

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ln n < \infty;$$

2. Ας είναι  $a_n \geq 0$  και  $\epsilon > 0$ .

Ισχύει ή όχι η συνεπαγωγή

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\epsilon} < \infty;$$

3. Ορίζουμε την ακολουθία

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}.$$

Υπολογίστε το όριο  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

4. Ας είναι

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό  $k$  ισχύει

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{N+k} - S_N = 0.$$

5. Υπολογίστε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$



$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n(n+2)}.$$

6. Αν  $a_n \geq 0$ ,  $a_n$  φθίνουσα και

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

δείξτε ότι  $a_n = o(1/n)$  (με άλλα λόγια δείξτε ότι  $na_n \rightarrow 0$ ).

7. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2.$$



Για  $n > 1$  έχουμε  $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ .

8. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq 3.$$

(Θυμηθείτε ότι  $0! = 1$ .)

9. Αν  $a_n \geq 0$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$  δείξτε ότι

$$\sum_n \sqrt{a_n a_{n+1}} < \infty.$$

Δείξτε επίσης ότι δεν ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή.



Αν  $x, y > 0$  τότε  $4xy \leq (x+y)^2$ .