---

1. Ισχύει

$$\int_{100}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx < \infty;$$

Λύση: Ναι. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \ln x$ και παίρνουμε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int_{\ln(100)}^{\infty} \frac{dy}{y^2} < \infty.$$

---

2. Ισχύει

$$\int_{100}^{\infty} \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}\, dx < \infty;$$

Λύση: Όχι. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \ln x$ και παίρνουμε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int_{\ln(100)}^{\infty} \frac{dy}{y \ln y}\, dy.$$

Με μια ακόμη αλλαγή μεταβλητής $z = \ln y$ το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{\ln\ln(100)}^{\infty} \frac{dz}{z} = +\infty.$$

---

3. Ισχύει

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\, dx < \infty;$$

Λύση: Όχι. Για $x \in [2k\pi - \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}]$ έχουμε

$$\cos^2 x \ge \frac{1}{2}.$$

Άρα

$$\int_{2k\pi-\frac{\pi}{4}}^{2k\pi+\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{x}\, dx \ge \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{4}}.$$

Για $k \ge 1$ εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει

$$\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{4}} \ge \frac{1}{2}\frac{1}{2k\pi - \frac{\pi}{4}}$$

άρα

$$\int_{2k\pi-\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\cos^2 x}{x}\, dx \int_{2k\pi-\frac{\pi}{4}}^{2k\pi+\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{x}\, dx \ge \frac{\pi}{8}\frac{1}{2k\pi - \frac{\pi}{4}} \ge \frac{1}{100} \int_{2k\pi-\pi/4}^{2(k+1)\pi-\pi/4} \frac{dx}{x}.$$

Τα διαστήματα $[2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi]$ για $k = 10, 11, \ldots,$ καλύπτουν μια ολόκληρη ημιευθεία και τα διαστήματα $[2k\pi - \pi/4, 2(k+1)\pi - \pi/4]$ το ίδιο. Άρα έχουμε δείξει ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{a}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\, dx$$

είναι

$$\ge C \int_{b}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx,$$

για κάποιες τιμές των a, b και για μια σταθερά C. Αφού το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι $+\infty$ το ίδιο θα είναι και το πρώτο.

---

4. Ας είναι $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη παντού και με f' συνεχή. Δείξτε ότι για κάθε $a < b$ ισχύει

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^n f(x) \cos \lambda x \, dx = 0.$$

Λύση: Με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx &= \int_a^b f(x)\left(\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\right)' dx \\ &= \frac{1}{\lambda}(f(b)\sin\lambda b - f(a)\sin\lambda a) - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\sin\lambda x\,dx\end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος προφανώς τείνει στο 0. Αφού f' συνεχής στο $[a, b]$ είναι και φραγμένη εκεί, έστω $|f'(x)| \le M$ για $x \in [a, b]$. Άρα το ολοκλήρωμα στο δεύτερο όρο είναι φραγμένο από $(b - a)M$, οπότε και ο δεύτερος όρος τείνει στο 0.

Αυτό είναι μια αρκετά ειδική περίπτωση του λεγόμενου λήμματος Riemann - Lebesgue από την ανάλυση Fourier.

---

5. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \sin(x^3)\,dx$$

συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Ξεκινήστε με την αλλαγή μεταβλητής $y = x^3$.

Λύση: Με την αλλαγή μεταβλητής

$$y = x^3, \quad dx = \frac{dy}{3x^2} = \frac{dy}{3y^{2/3}}$$

το ολοκλήρωμά μας γίνεται

$$\frac{1}{3}\int_1^\infty y^{-2/3}\sin y\,dy.$$

Κάνουμε σε αυτό ολοκλήρωση κατά μέρη

$$-\frac{1}{3}\int_1^\infty y^{-2/3}(\cos y)'\,dy = -\frac{1}{3}y^{-2/3}\cos y\Big|_1^\infty - \frac{2}{9}\int_1^\infty y^{-5/3}\cos y\,dy.$$

Ο πρώτος όρος είναι

$$\lim_{M\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\cos 1 - \frac{1}{3}M^{-2/3}\cos M\right)$$

το οποίο είναι ίσο με $\frac{1}{3}\cos 1$. Ο δεύτερος όρος είναι καταχρηστικό ολοκλήρωμα που συγκλίνει αφού ο ολοκληρωτέος είναι κατ' απόλυτη τιμή

$$\le y^{-5/3}$$

και το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty y^{-5/3}\,dy < \infty$ αφού ο εκθέτης είναι < -1.