Η συνάρτηση $y = f(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$(x+y)^3 = x^3 + y.$$

Βρείτε την παράγωγο y' ως συνάρτηση των x, y.

$$\frac{3y\,(y+2x)}{\left(1-3(x+y)^2\right)}$$

$$\Rightarrow 3(x+y)^2(1+y') = 3x^2 + y'$$

$$\Rightarrow 3(x+y)^2 + 3(x+y)^2 y' = 3x^2 + y'$$

$$\left(3(x+y)^2 - 1\right) y' = 3x^2 - 3(x+y)^2$$

$$y' = \frac{3x^2 - 3(x+y)^2}{3(x+y)^2 - 1} = \frac{\cancel{3x^2} - \cancel{3x^2} - 3y^2 - 6xy}{3(x+y)^2 - 1}$$

$$= \frac{-3y(y+2x)}{3(x+y)^2 - 1}$$

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι πολυώνυμο βαθμού n, με $n \geq 1$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι πάντα σωστές;

Θα πρέπει να επιλέξετε όλες τις σωστές και μόνο αυτές για να θεωρηθεί σωστή η άσκηση.

Select one or more:

1. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το όριο $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x^2)}$ υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$. ✗
2. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το όριο $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)^2}$ υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$. ✓
3. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το όριο $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{1}{f(x)}$ υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$. ✓

$$f(x) = x - 1$$

$$\frac{1}{f(x^2)} = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

$x \to 1^+ \quad +\infty$

$x \to 1^- \quad -\infty$

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές αν f κυρτή συνάρτηση;

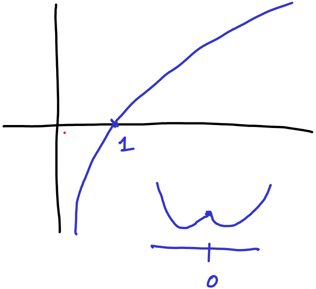
Select one or more:

- ☐ 1. Αν $\phi(x)$ κυρτή τότε και η σύνθεση $\phi(f(x))$ είναι κυρτή.
- ☐ 2. Η $\ln(f(x))$ είναι κυρτή (υποθέτουμε εδώ $f > 0$)
- ☐ 3. Η $e^{f(x)}$ είναι κυρτή.

$f'' \geq 0 \qquad \underbrace{\phi'' \geq 0}$

$$(\varphi(f(x)))'' = \big(\underbrace{\varphi'(f(x))}\,\underbrace{f'(x)}\big)'$$

$$= \underbrace{\underbrace{\varphi''(f(x))}\,[f'(x)]^2}_{\geq 0} + \varphi'(f(x))\,\underbrace{f''(x)}_{\geq 0}$$



$\ln x$

$\underline{f(x) = x}$

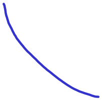
$f(x) = x^2$

$\ln x^2 = 2\ln x$

$\boxed{f(x) = |x|}$

$e^{|x|}$

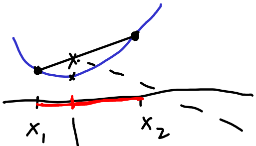
$\varphi \downarrow$



$f(x) = x^2, \quad \varphi(x) = -x$

$-x^2$

$$(e^f)'' = (\underbrace{f' e^f})' = \underbrace{f''}e^f + (\underbrace{f'})^2 e^f \geq 0 \leftarrow$$



$[0 \le t \le 1]$ $f((1-t)x_1 + t x_2) \le \boxed{(1-t) f(x_1) + t f(x_2)}$

$t=0 \to x_1$, $t=1 \to x_2$

$f((1-t)x_1 + t x_2)$

$$e^{f(x)} = g(x)$$

(a_1, b_1) $(x_1, f(x_1))$

(a_2, b_2). $(x_2, f(x_2))$

$$\left((1-t)a_1 + t a_2 , \boxed{(1-t) b_1 + t b_2}\right)$$

$0 \le t \le 1$

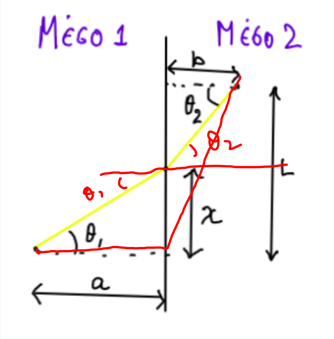
$$g((1-t)x_1 + t x_2) \le (1-t) g(x_1) + t g(x_2) = (1-t) e^{f(x_1)} + t e^{f(x_2)}$$

$$e^{f((1-t)x_1 + t x_2)} \le e^{(1-t) f(x_1) + t f(x_2)} \le (1-t) e^{f(x_1)} + t e^{f(x_2)}$$

e^x αύξουσα

κυρτότητα της e^x
με $x_1 = f(x_1)$, $x_2 = f(x_2)$

Μια ακτίνα φωτός φεύγει από μια πηγή που βρίσκεται στο Μέσο 1 (π.χ. νερό) και καταλήγει στο μάτι μας που βρίσκεται στο Μέσο 2 (π.χ. αέρας).



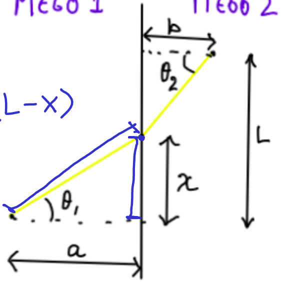
Η ταχύτητα μετάδοσης του φωτός στο μέσο 1 είναι 3 φορές πιο μικρή από αυτή στο μέσο 2. Δεχόμαστε ότι η ακτίνα του φωτός ακολουθεί τη συντομότερη διαδρομή.

Υπολογίστε το λόγο $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$. $= \dfrac{v_1}{v_2}$

Ακολουθώντας τους συμβολισμούς του σχήματος το μήκος που διανύει η ακτίνα στο Μέσο 1 είναι $\sqrt{a^2+x^2}$ ενώ το μήκος στο Μέσο 2 είναι $\sqrt{b^2+(L-x)^2}$. Άρα ο συνολικός χρόνος είναι η συνάρτηση

$$\mathrm{T}(x)=\frac{1}{v_1}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{1}{v_2}\sqrt{b^2+(L-x)^2}.$$

$\cdot 2(L-x)$



Αυτή τη συνάρτηση πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε για να βρούμε από πού θα περάσει η ακτίνα. Παίρνοντας παράγωγο ως προς x παίρνουμε

$$T'(x)=\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{1}{v_2}\frac{L-x}{\sqrt{b^2+(L-x)^2}}.$$

Παρατηρούμε ότι $\sin\theta_1=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ και $\sin\theta_2=\frac{L-x}{\sqrt{b^2+(L-x)^2}}$. Θέτοντας την παράγωγο $T'(x)=0$ όπως πρέπει να συμβαίνει στη θέση ελαχίστου χρόνου παίρνουμε

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{1}{3}.$$

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}$$

Αυτός είναι ο νόμος του Snell.

Ποιο είναι το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(6\ln x-1)(3\ln x-1)(6\ln x-1)}{(6+5\ln x)(2-6\ln x)(3-3\ln x)};$$

$x \to +\infty$

$\boxed{y=\ln x} \to +\infty$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{(6y-1)(3y-1)(6y-1)}{(6+5y)(2-6y)(3-3y)}$$

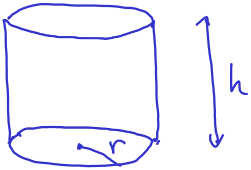
$$\frac{6\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{6}}{5\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{3}}=\frac{6}{5}$$

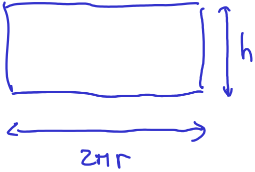
$$\frac{a_3y^3+a_2y^2+a_1y+a_0}{b_3y^3+b_2y^2+b_1y+b_0}\xrightarrow{y\to\infty}\frac{a_3}{b_3}$$

Έχουμε ένα βαρέλι που είναι ένας ορθός κυκλικός κύλινδρος με ακτίνα βάσης r και ύψος h. Το βαρέλι έχει πάτο αλλά όχι καπάκι. Αν θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια του βαρελιού (πάτος + το πλαϊνό κομμάτι) είναι σταθερό ποιος πρέπει να είναι ο λόγος $\underline{r/h}$ ώστε ο όγκος του βαρελιού να είναι ο μέγιστος;

Αριθμητική απάντηση με ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων.

$$\lambda = \frac{r}{h}$$





$$E_o = 2\pi r^2 + 2\pi r h \qquad\qquad V = \pi r^2 \underline{h}$$

$$h = \frac{E_o - \pi r^2}{2\pi r}$$

$$V(r) = \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \frac{E_o - \pi r^2}{2\cancel{\pi r}}$$

$$V(r) = \frac{E_o}{2} r - \frac{\pi}{2} r^3$$

$$V'(r) = \frac{E_o}{2} - \frac{3\pi}{2} r^2 = 0 \implies r^2 = \frac{E_o}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{3\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{E_o}{3\pi}}$$

$$h = \frac{E_o - \cancel{\pi} \, E_o/3\cancel{\pi}}{2\pi \sqrt{\frac{E_o}{3\pi}}} = \frac{\frac{2}{3} E_o}{2\pi \frac{\sqrt{E_o}}{\sqrt{3\pi}}}$$

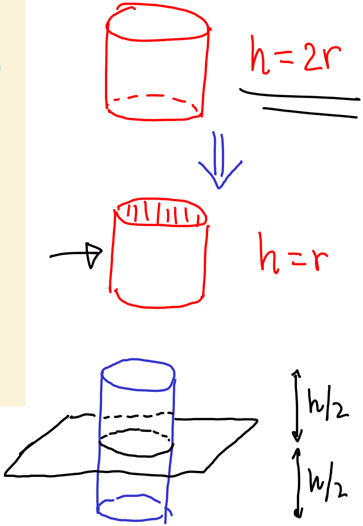
$$= \frac{\sqrt{E_o}\,\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{r}{h} = \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}\,\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}} \frac{}{\cancel{\sqrt{\pi}}} = 1$$

Άλλη λύση

Υπάρχει όμως και το παρακάτω κόλπο που μας επιτρέπει να αναγάγουμε το πρόβλημα αυτό στο πρόβλημα που λύσαμε στη διάλεξη 7.5 και να πάρουμε το αποτέλεσμά μας χωρίς καθόλου πράξεις.

Φανταστείτε ότι έχουμε ένα βαρέλι όπως αυτό της διάλεξης 7.5, με πάτο **και** καπάκι. Αν το κόψουμε οριζόντια στη μέση και ακομπήσουμε το πάνω μισό κάτω (αφού το αναποδογυρίσουμε) παίρνουμε δύο ίδια βαρέλια, όπως αυτά που μας ενδιαφέρουν, δηλ. που έχουν μόνο πάτο, όχι καπάκι. Αν η επιφάνεια του ολόκληρου βαρελιού θεωρηθεί δεδομένη και σταθερή τότε και η επιφάνεια του καθενός από τα δύο μισά είναι σταθερή. Μεγιστοποίηση του όγκου του ολόκληρου βαρελιού ισοδυναμεί με τη μεγιστοποίηση του όγκου του καθενός από τα δύο μικρά βαρέλια. Αφού από τη διάλεξη 7.5 γνωρίζουμε ότι ο όγκος του μεγάλου βαρελιού μεγιστοποιείται αν η διάμετρος του κύκλου ισούται με το ύψος (του μεγάλου βαρελιού πάντα), σε αυτή ακριβώς την περίπτωση μεγιστοποιείται και ο όγκος των μικρών βαρελιών, όταν δηλ. το ύψος τους (που είναι το μισό του μεγάλου) ισούται με την **ακτίνα** του πάτου.



$$\frac{h/2}{r} = \frac{2r/2}{r} = 1$$

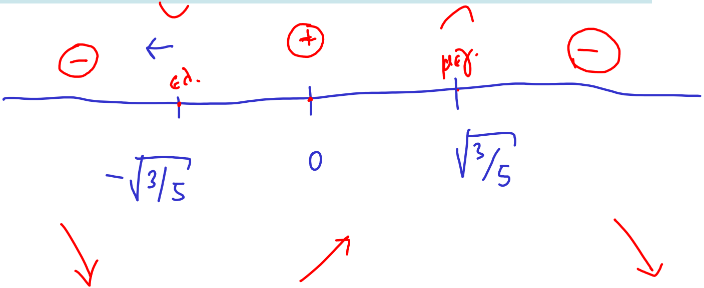
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^5$. Η συνάρτηση αυτή έχει 3 κρίσιμα σημεία στο $\mathbb{R}$. Βρείτε τα και χαρακτηρείστε το καθένα από αυτά με την κωδικοποίηση: 1 (τοπικό μέγιστο), -1 (τοπικό ελάχιστο), 0 (ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο).

Ποια είναι αυτά τα κρίσιμα σημεία (**σε αύξουσα σειρά**); ____, ____, ____

Και ποιος ο αντίστοιχος χαρακτηρισμός; ____, ____, ____

$$f'(x) = 3x^2 - 5x^4$$
$$= x^2(3 - 5x^2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$$



$$f'(x) = 5x^2\left(\sqrt{\frac{3}{5}} - x\right)\left(\sqrt{\frac{3}{5}} + x\right)$$

+ −

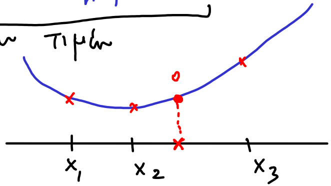
− +

f κυρτή στο (a,b), $\quad x_1, x_2, \dots, x_n \in (a,b)$

$t_1, t_2, \dots t_n \qquad 1 \geq t_j \geq 0 \qquad t_1+\dots+t_n = 1$

Jensen

$$(*) \quad f(\underbrace{t_1x_1+t_2x_2+\dots+t_nx_n}_{\text{μ.ο. των σημείων}}) \leq \underbrace{t_1f(x_1)+\dots+t_nf(x_n)}_{\text{μ.ο. των τιμών}}$$



$n=2 \qquad (*) =$ ορισμός της κυρτότητας

$t_1+t_2=1$

$t_1=(1-t_2)$

$$f((1-t)x_1+t\,x_2) \leq (1-t)f(x_1)+t\,f(x_2)$$

$$\underbrace{t_1X_1+t_2X_2+t_3X_3}_{\text{ένας μέσος όρος των } x_1, x_2, x_3}$$