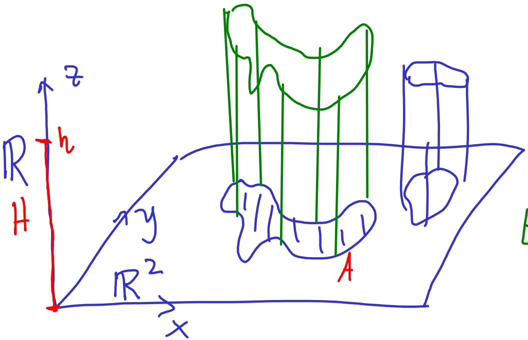
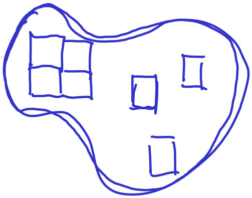
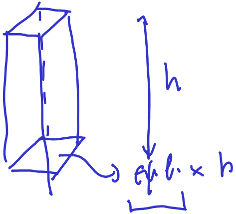




$E \cdot h$



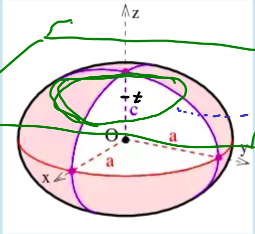
$A \subseteq \mathbb{R}^2$

$H \subseteq \mathbb{R}$

κύλινδρος $= A \times H$

$= \{ (x,y,z) : (x,y) \in A, \ z \in H \}$

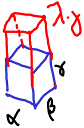
Θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο ενός *σφαιρικού ελλειψοειδούς*:



$\pi \frac{10}{3} a \cdot c$

λανθασμένες διαστάσεις

$\alpha \cdot \beta \, \lambda \gamma = \lambda \, \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$



$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$

$\frac{4}{3}\pi a^3$

όγκος σφ. ελ. $= \frac{c}{a}$ (όγκο α-σφ)

$\lambda = \frac{c}{a}$

Η επιφάνεια του σχήματος αυτού είναι όλα τα σημεία του χώρου που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

a^2

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

σφαίρα

$z = t \quad A(t) = \pi \frac{a^2}{c^2}(c^2 - t^2)$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 - \frac{t^2}{c^2}$

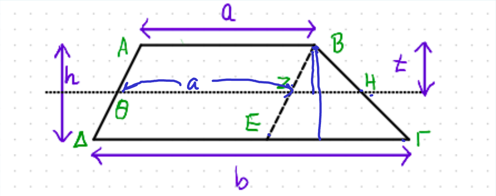
$x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{c}\sqrt{c^2 - t^2}\right)^2$

Θα υπολογίσουμε τον όγκο ολοκληρώνοντας το εμβαδό της τομής του ελλειψοειδούς αυτού με ένα οριζόντιο επίπεδο (παράλληλο δηλ με το επίπεδο xy) που ξεκινά από το ύψος $z = -c$ και φτάνει ως το ύψος $z = c$.

Αν ονομάσουμε t τη z-συντεταγμένη αυτού του επιπέδου ποιο είναι το εμβαδό της τομής του με το ελλειψοειδές; (Η τομή αυτή είναι πάντα κύκλος όπως φαίνεται από την εξίσωση παραπάνω σταθεροποιώντας το z).

$$\int_{-c}^{c} A(t)\,dt = \frac{\pi a^2}{c^2}\int_{-c}^{c} c^2 - t^2\,dt = \frac{\pi a^2}{c^2}\left(c^2 t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-c}^{c} = \frac{\pi a^2}{c^2}\left[c^3 - \frac{c^3}{3} + c^3 - \frac{c^3}{3}\right] = \boxed{\frac{4}{3}\pi a^2 c}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό ενός τραπεζίου με άνω πλευρά μήκους a, κάτω πλευρά μήκους b και ύψος h:



$\boxed{L(t)}$

$$E = \int_0^h L(t)\,dt$$

Θα το κάνουμε αυτό ολοκληρώνοντας για t από 0 έως h το μήκος της τομής της οριζόντας ευθείας που απέχει t από πάνω με το τραπέζιο, το μήκος δηλ. ΘΗ.

$$L(t) = \underline{\underline{a}} + \underline{\underline{ZH}} = a + t\,\frac{b-a}{h}$$

$$t = 0 \to ZH = 0$$

$$t = h \to ZH = b-a$$

Ποιο είναι το μήκος αυτής της τομής; Η απάντηση είναι συνάρτηση των a, b, h, t.

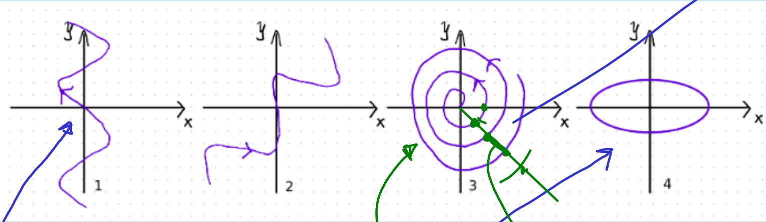
$$\frac{t}{h} = \frac{ZH}{E\Gamma} \Rightarrow ZH = t\,\frac{b-a}{h}$$

Ολοκληρώνοντας της συνάρτηση που βρήκατε στο προηγούμενο, ποιο είναι το εμβαδό του τραπεζίου; Η απάντηση είναι συνάρτηση των a, b, h.

$$E = \int_0^h a + t\,\frac{b-a}{h}\,dt = a\cdot h + \frac{b-a}{h}\int_0^h t\,dt = a\cdot h + \frac{b-a}{\cancel{h}}\,\frac{h^{\cancel{2}}}{2} = ah + \frac{b}{2}h - \frac{a}{2}h$$

$$= \frac{a+b}{2}h$$

Ποια παραμέτριση ταιριάζει καλύτερα σε ποια επίπεδη καμπύλη;



1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ .

Τοποθετήστε τις παρακάτω παραμετρίσεις στις σωστές θέσεις:

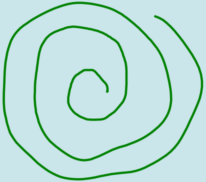
1: $x(t) = \cos t, \quad y(t) = \dfrac{1}{2}\sin t$

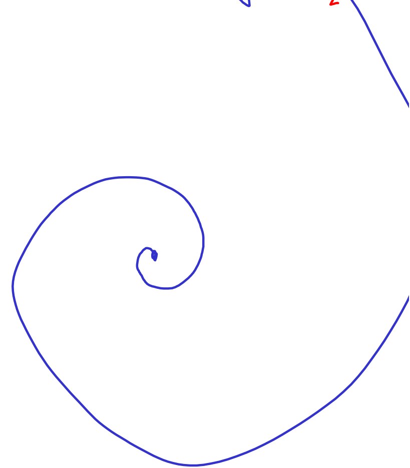
2: $x(t) = \sin t, \quad y(t) = t$

3: $x(t) = t - \sin t, \quad y(t) = t + \sin t$

4: $x(t) = t\cos t, \quad y(t) = t\sin t$

$x(t) = \cos t \qquad y(t) = \frac{1}{2}\sin t$



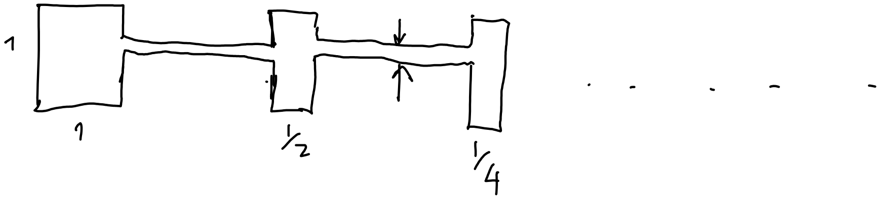


$t\cdot\cos t \qquad t\cdot\sin t$

$t^2\cos t, \qquad t^2\sin t$

$(t+1)\cos t, \quad (t+1)\sin t$

$= 2$



Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παντού παραγωγίσιμη και είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

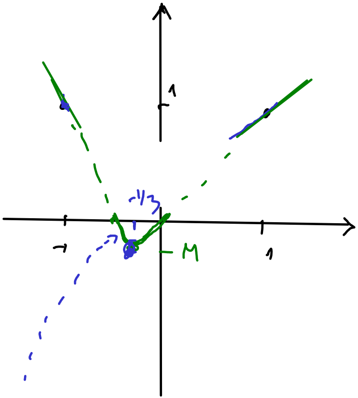
Επίσης έχουμε $f(-1) = f(1) = 1$ και $f'(-1) = -2$, $f'(1) = 1$.

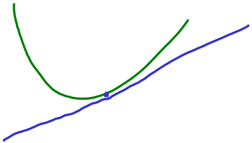
Υπό αυτές τις υποθέσεις υπάρχουν κάποια $M \in \mathbb{R}$ τ.ώ.

$$\textit{Για κάθε } x \in [-1, 1] \textit{ ισχύει } f(x) \geq M.$$

Ποιο είναι το μέγιστο τέτοιο M;

(Ένα σχήμα θα σας βοηθήσει. Θυμηθείτε ότι η εφαπτόμενη ευθεία σε μια κυρτή συνάρτηση είναι κάτω από το γράφημα της συνάρτησης.)





$$\begin{cases} y = 1 + -2(x+1) \\ y = 1 + (x-1) \end{cases}$$

$x - 1 = -2x - 2$

$3x = -1$

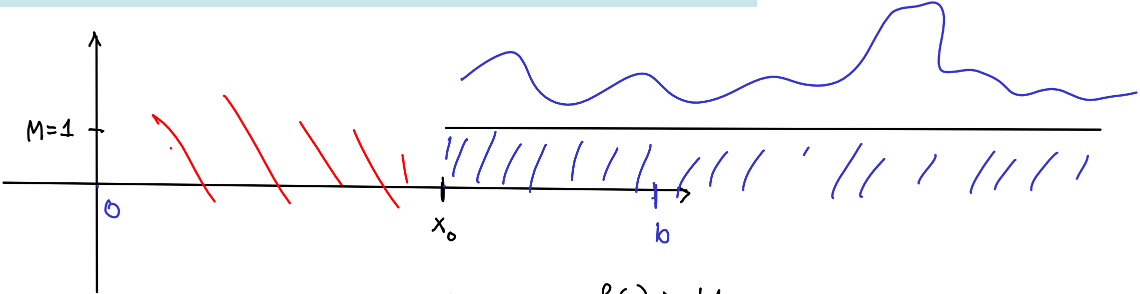
$x = -1/3$

$y =$

$y = 1 + \frac{-1}{3} - 1 = -1/3$

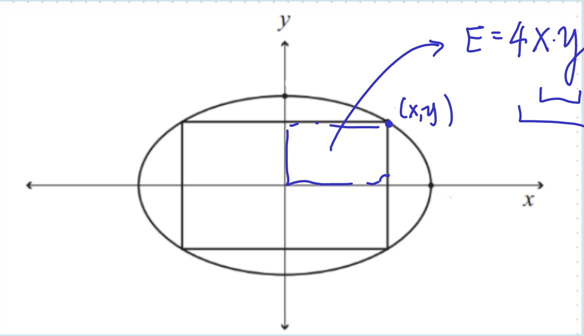
Ας είναι $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ μια συνάρτηση που είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο διάστημα.

Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ τότε $\int_0^{\infty} f(x)\,dx = +\infty$.



$$x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \geq M = 1$$

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b f(x)\,dx \geq \lim_{b\to\infty} \int_{x_0}^b \overbrace{f(x)}^{\geq 1}\,dx \geq \lim_{b} (b - x_0) = +\infty$$



$$E = 4x\cdot y = 4x\sqrt{5^2-\left(\tfrac{1}{6}\right)^2x^2}$$

$$E' = 4\sqrt{5^2-\left(\tfrac{1}{6}\right)^2x^2} + 4x\,\frac{1}{2}\,\frac{-2\left(\frac{1}{6}\right)^2x}{\sqrt{5^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2x^2}}$$

$$\left(5^2-\left(\tfrac{1}{6}\right)^2x^2\right) - \left(\tfrac{1}{6}\right)^2x^2 = 0$$

$$25 - 2\,\frac{1}{36}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 25\cdot 18$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{25\cdot 18}$$

Στην έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{30^2}+\frac{y^2}{5^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{5^2} = 1-\frac{x^2}{30^2} \Rightarrow y^2 = 5^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2x^2$$

εγγράφουμε ένα ορθογώνιο παράλληλο με τους άξονες όπως φαίνεται στο σχήμα.

$$\Rightarrow y = \sqrt{5^2-\left(\tfrac{1}{6}\right)^2x^2} = \sqrt{25-\tfrac{1}{36}25\cdot 18}$$

Ποιο είναι το μέγιστο εμβαδό του ορθογωνίου αυτού;

Αριθμητική απάντηση με ακρίβεια 3 δεκαδικών.

$$= \sqrt{25-\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

0.083 ✖

One possible correct answer is: 75

$$x\cdot y = 5\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{2}} = 75$$

Μια σταγόνα βροχής πέφτει προς το έδαφος υπό την επήρρεια της βαρύτητας. Η αρχική της μάζα (χρονική στιγμή 0) είναι 20 και η αρχική της ταχύτητα είναι 0 αλλά όπως πέφτει εξαερώνεται μέρος της και η μάζα της αλλάζει στο χρόνο σύμφωνα με την ισότητα

$$m(t) = 20 - 3t.$$

Σε ποια χρονική στιγμή είναι μέγιστη η κινητική της ενέργεια;

Θυμίζουμε ότι η κινητική ενέργεια ενός σώματος μάζας M και ταχύτητας V είναι $\frac{1}{2}MV^2$.

Θυμίζουμε επίσης ότι η ταχύτητα ενός σώματος τη χρονική στιγμή t που πέφτει λόγω βαρύτητας όντας ακίνητο τη χρονική στιγμή 0 είναι ίση με gt, όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας (δε χρειάζεται να ξέρετε την τιμή του g).

Αριθμητική απάντηση με ακρίβεια 3 δεκαδικών.

6.66 ✖

One possible correct answer is: 4.4444444444444

$$E(t) = \frac{1}{2}(20 - 3 \cdot t)\, g^2 t^2$$

$$= g^2 \left(10 - \frac{3}{2} t\right) t^2$$

$$= g^2 \left(10 t^2 - \frac{3}{2} t^3\right)$$

$$E'(t) = g^2 \left(20 t - \frac{9}{2} t^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 20 - \frac{9}{2} t = 0$$

$$t = \frac{40}{9}$$

Παραδείγματα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$\lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^{M} \frac{x}{1+x^2}\,dx = 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} = +\infty$$

$$\frac{1}{2}\ln|1+x^2|$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{1+x^2} = -\infty$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} \geq \int_1^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} \geq 2^{-1}\int_1^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2} = 2^{-1}\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$$

$$1+x^2 \leq 2x^2$$

$$1+x^2 \leq 2x^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \overset{\text{ορ.}}{=} \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{|x|\,dx}{1+x^2} = +\infty$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{|x|\,dx}{1+x^2} = +\infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|\,dx}{1+x^2} = +\infty$$

ορίζω

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^{M} f(x)\,dx$$

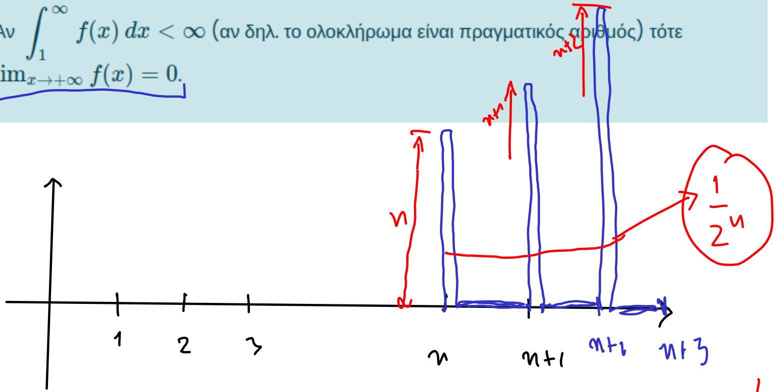
$$f(-x) = -f(x)$$

Σωστό ή λάθος;

Ας είναι $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ μια συνάρτηση που είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο διάστημα.

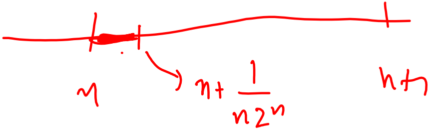
Αν $\int_1^{\infty} f(x)\, dx < \infty$ (αν δηλ. το ολοκλήρωμα είναι πραγματικός αριθμός) τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$



$$\int_1^{\infty} \sin x^3 \, dx \text{ υπάρχει}$$

$\left[n, n+\frac{1}{n2^n}\right]$ ύψος n



blow-up

$$y'(t) = ry(t)$$

με r να είναι το επιτόκιο (έχουμε $r = 0.1$), ο ρυθμός αύξησης των χρημάτων (στο νέο προϊόν) να είναι ανάλογος του **τετραγώνου** του υπάρχοντος ποσού, υπόκειται δηλ. στη διαφορική εξίσωση

$$y'(t) = sy^2(t)$$

όπου s είναι ένα μειωμένο επιτόκιο (έχουμε $s = 0.01$).

$t=0 \quad y_0$

$$y(0) = \frac{-1}{C} \Rightarrow C = \frac{-1}{y_0}$$

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = s$$

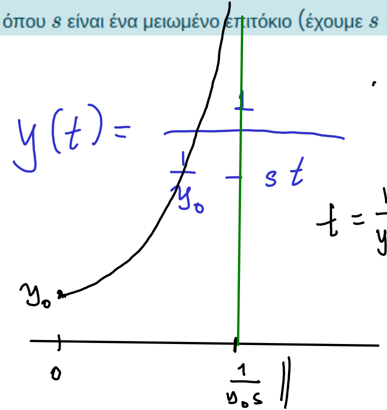
$$\left(-\frac{1}{y(t)}\right)' = s$$

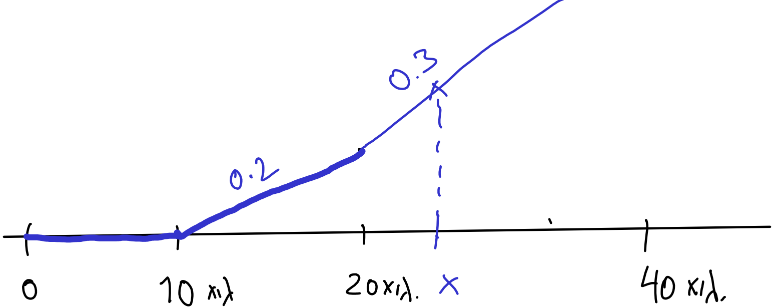
$$-\frac{1}{y(t)} = st + C$$

$$y(t) = \frac{-1}{st+C} = \frac{-1}{st - \frac{1}{y_0}}$$

$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - st} \qquad t \geq 0$$

$$t = \frac{1}{y_0 \cdot s} \qquad y(t)\uparrow$$



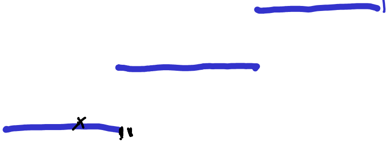


$20\% \cdot 11$

$20\% \cdot (11 - 10)$

$0.2\,(x - 10)$

$$f(x) = x - T(x)$$



$f(x) \uparrow$