Καταχρηστικά ολοκληρώματα Riemann

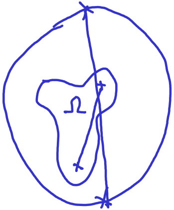
Τι νόημα να δώσουμε στο $\int_0^1 \frac{dx}{x}$;

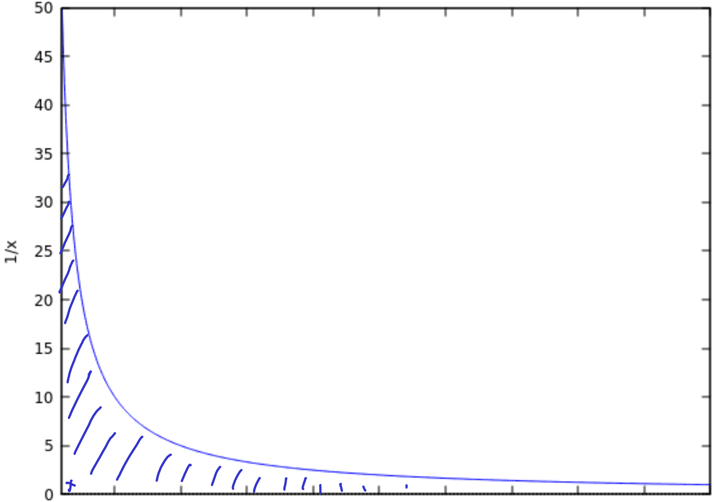
$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad |f(x)| \le M$$

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{f(\xi_i)}(x_i - x_{i-1})$$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$[0,1]$

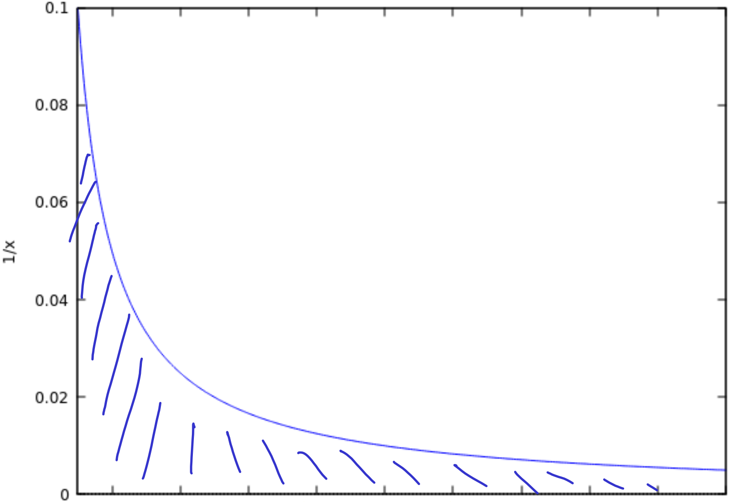




Καταχρηστικά ολοκληρώματα Riemann

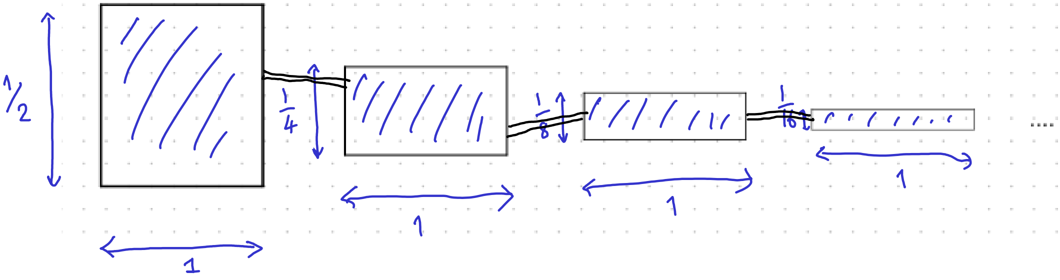
Και τι νόημα να δώσουμε στο $\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x}$;

$[10, +\infty)$



Πεπερασμένο εμβαδό μέχρι το άπειρο;

Μπορεί ένα σχήμα να έχει πεπερασμένο εμβαδό αλλά να εκτείνεται ως το άπειρο (δηλ. να μην είναι *φραγμένο*);

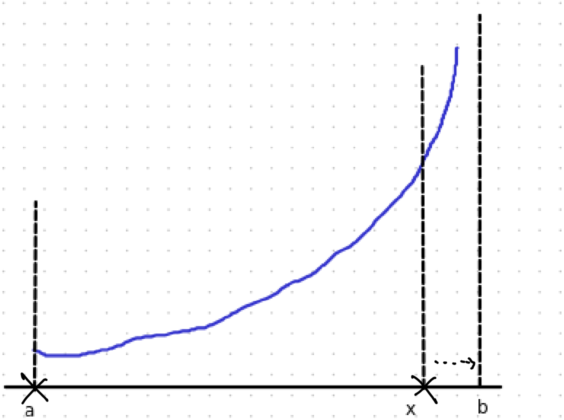


$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \leq 1$$

Ορισμός μέσω ορίου

Αν υπάρχουν τα Riemann ολοκληρώματα $\int_a^x f(t)\,dt$ για $x < b$ ορίζουμε

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to b-} \int_a^x f(t)\,dt.$$



$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

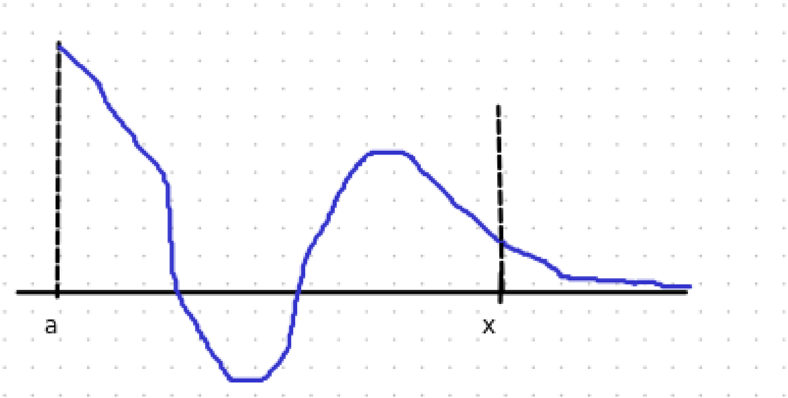
$$\int_x^1 \frac{dt}{t}$$

$x > 0$

Ορισμός μέσω ορίου

Αν υπάρχουν τα Riemann ολοκληρώματα $\int_a^x f(t)\,dt$ για $x > a$ ορίζουμε

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt.$$



Παραδείγματα

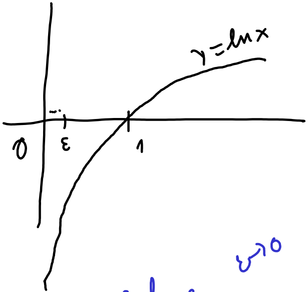
$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M e^{-x}\,dx = \lim_{M\to\infty} -e^{-x}\Big|_1^M = \lim_{M\to\infty}\left(\overbrace{-e^{-M}}^{0} + e^{-1}\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \frac{1}{e}$$

Παραδείγματα

$\int_0^1 \ln x\,dx = -1$

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(x\ln x - x\right)\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \underbrace{-1}_{\to -1} - \overbrace{\varepsilon\ln\varepsilon}^{\to 0} + \overset{\to 0}{\varepsilon} = -1$$



$$\int \ln x\,dx = \int x'\ln x\,dx = x\ln x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \underbrace{x\ln x - x} + C$$

$\varepsilon \to 0$

$$\varepsilon\ln\varepsilon \to 0$$

$$\varepsilon\ln\varepsilon = \frac{\ln\varepsilon}{1/\varepsilon} = \frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} = -\varepsilon \to 0$$

Μη αρνητικές συναρτήσεις

$a, b = +\infty$ επιτρέπεται

Θεώρημα

Αν $f(x) \geq 0$ τότε το

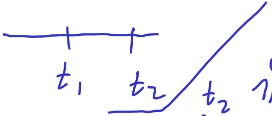
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b} \boxed{\int_a^t f(x)\,dx}$$

υπάρχει πάντα (αλλά μπορεί να είναι $+\infty$).

$$\boxed{\int_a^t f(x)\,dx} = \varphi(t) \uparrow$$

Συνέπεια της μονοτονίας (ως προς t) του

$$\int_a^t f(x)\,dx, \qquad \text{για } t \to b- \,.$$



$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx \geq 0$$

Παραδείγματα

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln x \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\underbrace{\cancel{\ln 1}}_{=0} - \ln\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{\to +\infty}$$

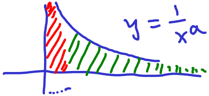
$$= +\infty$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{dx}{x} = \lim_{M\to\infty} \ln x \Big|_1^M = \lim_{M\to\infty} \ln M = +\infty$$

Παραδείγματα

Για $a > 0$

$a = 1$ $\qquad a > 1 \qquad a < 1$



$$\int \frac{1}{x^a}\,dx = \int x^{-a}\,dx = \frac{x^{-a+1}}{-a+1}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^a} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left.\frac{x^{1-a}}{1-a}\right|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{1-a} - \frac{\varepsilon^{1-a}}{1-a}$$

$$= \frac{1}{1-a} - \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon^{1-a}}{1-a} \quad \xrightarrow{a<1} 0, \qquad \xrightarrow{a>1} +\infty$$

$a<1$: $\frac{1}{1-a}$ $\qquad$ $a \geq 1$: $+\infty$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^a} = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^a} = \lim_{M\to\infty} \frac{M^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a} \quad \xrightarrow{a<1} +\infty, \qquad \xrightarrow{a>1} \frac{1}{a-1}$$

$a>1$: $\frac{1}{a-1}$

$a \leq 1$: $+\infty$

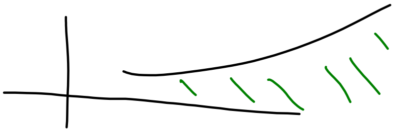
Παραδείγματα

$$\int e^{-ax}\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a} + c$$

Για $a > 0$

$$\int_1^{\infty} e^{-ax}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^{M} e^{-ax}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \frac{e^{-a}}{a} - \frac{\overbrace{e^{-aM}}^{\to 0}}{a} = \frac{e^{-a}}{a}$$

$$a \le 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{\overbrace{-ax}^{+}} = +\infty$$



Παραδείγματα

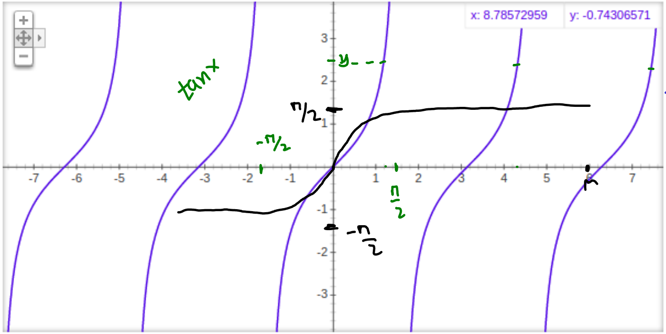
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx \ ✓ + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx \ ✓$$

Χρησιμοποιώντας $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$

αν ξέρουμε ότι υπάρχει

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^{M} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to+\infty} \arctan M - \arctan(-M) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{1} + \int_{1}^{+\infty}$$

$1 < x$:

$$\frac{1}{1+x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \le \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} < \infty$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, +\infty)$$

$$\arctan : (-\infty, +\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

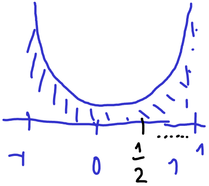
Παραδείγματα

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$ $\quad$ $\arcsin : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$y = \sin x$

Χρησιμοποιώντας $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \Big(\underbrace{\arcsin(\overset{\to 1}{1-\varepsilon})}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arcsin(\overset{\to -1}{-1+\varepsilon})}_{-\frac{\pi}{2}} \Big) = \pi$$



$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1-x)^{1/2}\,(1+x)^{1/2}}$$

$y \to 0$

$x > \frac{1}{2}$

$y < \frac{1}{2}$

$$1 \le 1+x \le 2 \qquad \int_{1/2}^{1} \frac{1}{(1-x)^{1/2}(1+x)^{1/2}} \le \int_0^{1/2} \frac{dy}{y^{1/2}} < \infty$$

Σύγκλιση

Θεώρημα

Αν $\underbrace{|g(x)|}$ $\leq f(x)$ *και* $\int_a^b f(x)\,dx < \infty$ *τότε το*

ολοκληρώσιμες

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

συγκλίνει.

Έχουμε $0 \leq \underbrace{f(x)+g(x)} \leq \boxed{2f(x)}$ άρα υπάρχει το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx \leq 2\int_a^b f(x)\,dx < \infty$$

και είναι πεπερασμένο. $\lim(a_n+b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ (αν υπάρχουν τα όρια στο δεξί μέλος)

Έτσι

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)+g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$

Παραδείγματα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$$

$|\sin x| \leq 1$

$$\left| \frac{\sin x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

Παραδείγματα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$\lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^{M} \frac{x}{1+x^2}\,dx = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^2} = +\infty$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x\,dx}{1+x^2} = -\infty$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^2} \geq \int_1^\infty \frac{x\,dx}{1+x^2} \geq 2\int_1^\infty \frac{x\,dx}{x^2} = 2\int_1^\infty \frac{dx}{x} = +\infty$$

$$1+x^2 \leq 2x^2$$

$$\int_0^\infty \frac{|x|\,dx}{1+x^2} = +\infty$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{|x|\,dx}{1+x^2} = +\infty$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{|x|\,dx}{1+x^2} = +\infty$$

Παραδείγματα

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{x} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$= \underbrace{\lim_{M\to\infty}} \int_1^M \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_1^M \frac{1}{x}(-\cos x)'\,dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^M - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$\lim_{M\to\infty} \boxed{\cos 1} - \underbrace{\frac{\cos M}{M}}_{\to 0} - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$\boxed{-\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx}$$

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \infty$$