Απειροστικος Λογισμος Ι – Φθινοπωρο 2020-21

Λύσεις των ασκήσεων

---

1. Χρησιμοποιώντας τα φράγματα

$$0 \le \sin^2 x \le 1$$

δώστε ένα κάτω και ένα άνω φράγμα για το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx$$

χωρίς να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα.

Λύση: Ισχύει

$$1 \le \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x} \le \frac{3}{2}$$

άρα

$$\int_0^{\pi/2} 1\, dx \le \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx \le \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{3}{2}}\, dx$$

άρα

$$\frac{\pi}{2} \le \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx \le \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

ή

$$1.57 \le \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx \le 1.91.$$

---

2. Στην άσκηση αυτή παίρνουμε **ως ορισμό** της συνάρτησης $\ln x$ τον τύπο

$$lnx = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad \text{για } x > 0,$$

και προσπαθούμε να αποδείξουμε μερικές από τις γνωστές ιδιότητες της συνάρτησης ln.

(1) Δείξτε $\ln 1 = 0$.

(2) Δείξτε ότι $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$. Κάντε την αλλαγή μεταβλητής $z = xt$ στο ολοκλήρωμα $\int_1^{1/x} \frac{dt}{t}$.

(3) Δείξτε ότι $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$. Κάντε μια παρόμοια αλλαγή μεταβλητής όπως και στο (2).

(4) Δείξτε ότι $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Χρησιμοποιήστε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.

(5) Δείξτε ότι $\ln(x^a) = a \ln x$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Υποθέστε γνωστό ότι $(x^a)' = ax^{a-1}$ και κάντε την αλλαγή μεταβλητής $t = y^a$ στο ολοκλήρωμα $\int_1^{x^a} \frac{dt}{t}$.

Λύση:

(1)

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$$

αφού πάντα ισχύει $\int_a^a f(x)\, dx = 0$.

(2) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\ln\frac{1}{x} &= \int_1^{1/x}\frac{dt}{t}\\
&= \int_x^1 \frac{dz}{z} \quad \text{με την αλλαγή } z = xt, dt = dz/x \text{ οπότε τα όρια γίνονται από } x \text{ έως } 1\\
&= -\int_1^x \frac{dz}{z}\\
&= -\ln x.
\end{aligned}$$

(3) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\ln(xy) &= \int_1^{xy}\frac{dt}{t}\\
&= \int_{1/y}^x \frac{dz}{z} \quad \text{με την αλλαγή } z = t/y,\ dt = ydz \text{ οπότε τα όρια γίνονται από } 1/y \text{ έως } x\\
&= \int_{1/y}^1 \frac{dz}{z} + \int_1^x \frac{dz}{z}\\
&= -\int_1^{1/y} \frac{dz}{z} + \int_1^x \frac{dz}{z}\\
&= \ln x - \ln\frac{1}{y}\\
&= \ln x + \ln y \quad \text{από το (2).}
\end{aligned}$$

Δείξτε ότι $\ln(x\cdot y) = \ln x + \ln y$. Κάντε μια παρόμοια αλλαγή μεταβλητής όπως και στο (2).

(4) Απλά εφαρμόζουμε το Θεμελιώδες Θεώρημα στο ολοκλήρωμα που ορίζει το λογάριθμο και παρατηρούμε ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση $1/t$ είναι παντού συνεχής στο $(0, +\infty)$.

(5)

$$\begin{aligned}
\ln x^a &= \int_1^{x^a}\frac{dt}{t}\\
&= \int_1^x \frac{ay^{a-1}dy}{y^a} \quad \text{με την αλλαγή } t = y^a,\ dt = ay^{a-1}dy, \text{ οπότε τα όρια γίνονται από } 1 \text{ έως } x\\
&= a\int_1^x \frac{dy}{y}\\
&= a\ln x.
\end{aligned}$$

---

3. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι η f είναι παντού 0 αν και μόνο αν

(1) $$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0 \qquad \text{για κάθε } g : (a, b) \to \mathbb{R} \text{ συνεχή.}$$

Λύση: Αν η f είναι ταυτοτικά 0 στο (a, b) τότε η (1) ισχύει προφανώς.

Υποθέτουμε τώρα ότι η f δεν είναι παντού 0 και θα δείξουμε ότι υπάρχει συνεχής $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ τ.ώ. $\int_a^b f(x)g(x)\,dx \neq 0$.

Αφού η f δεν είναι παντού 0 υπάρχει ένα σημείο x_0 στο (a, b) όπου $f(x_0) \neq 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x_0) > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0 υπάρχει ένα $\delta > 0$ τ.ώ.

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \qquad \text{για } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Επιλέγουμε τότε τη συνάρτηση g να είναι 0 εκτός του διαστήματος $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και μέσα στο διάστημα αυτό το γράφημα της g να είναι είναι τριγωνάκι με κορυφή ύψους 1 στο x_0 και που να μηδενίζεται ακριβώς στα $x_0 \pm \delta$.

Τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ ισούται με το

$$\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)g(x)\,dx \ge \frac{f(x_0)}{2}\int x_0 - \delta^{x_0+\delta} g(x)\,dx = \frac{f(x_0)\delta}{2} > 0$$

όπως είχαμε να δείξουμε.

---

4. Αν $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες ορίζουμε το *εσωτερικό τους γινόμενο* να είναι η ποσότητα

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Δύο τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται *ορθογώνιες* αν $\langle f, g\rangle = 0$.

Δείξτε το Πυθαγόρειο θεώρημα για ολοκληρώματα: αν f, g ορθογώνιες και $h = f + g$ τότε

$$\int\limits_a^b h^2(x)\,dx = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx + \int\limits_a^b g^2(x)\,dx$$

Δείξτε επίσης ότι στο διάστημα $[0, 1]$ οι συναρτήσεις $\cos 2\pi x$ και $\sin 2\pi x$ είναι ορθογώνιες.

***Λύση*:** Η απόδειξη είναι πολύ απλή.

$$\int\limits_a^b h^2(x)\,dx = \int\limits_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx = \int\limits_a^b f^2(x)+g^2(x)+2f(x)g(x)\,dx = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx + \int\limits_a^b g^2(x)\,dx.$$

Τέλος, με την αλλαγή μεταβλητής $y = \sin(2\pi x)$, $dy = 2\pi\cos(2\pi x)$, έχουμε

$$\int \cos(2\pi x)\sin(2\pi x)\,dx = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\sin^2(2\pi x) + C,$$

άρα

$$\int\limits_0^1 \cos(2\pi x)\sin(2\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(2\pi x)\Big|_0^1 = 0.$$

---

5. Με τον ορισμό ορθογωνιότητας συναρτήσεων που δώσαμε στο πρόβλημα 4 δείξτε ότι στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχουμε τις εξής σχέσεις ορθογωνιότητας

(1) $\langle\cos(mx), \sin(nx)\rangle = 0$ για κάθε $m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$
(2) $\langle\cos(mx), \cos(nx)\rangle = 0$ για κάθε $m \ne n$, $m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$
(3) $\langle\sin(mx), \sin(nx)\rangle = 0$ για κάθε $m \ne n$, $m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

Χρησιμοποιήστε τους τριγωνομετρικούς τύπους

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

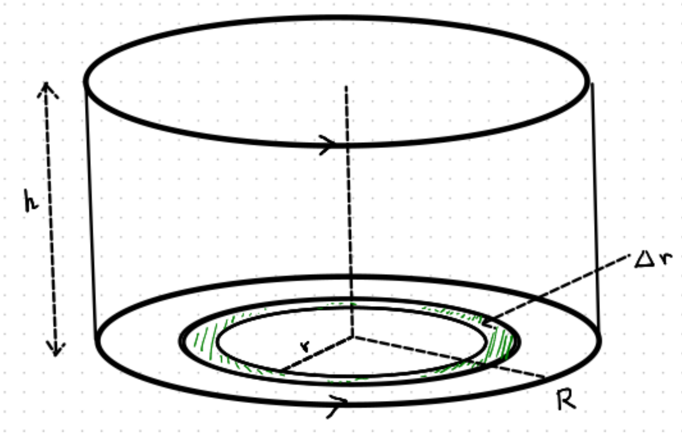
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

***Λύση*:** Χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς τύπους της υπόδειξης στον ορισμό του εσωτερικού γινομένου το ολοκλήρωμα του γινομένου γίνεται άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων και το μόνο που χρειάζεται να ξέρουμε από δω και πέρα είναι ότι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\sin(nx)$ και της συνάρτησης $\cos(nx)$ πάνω σε μια περίοδό τους (μια τέτοια περίοδος είναι το διάστημα $[0, 2\pi]$ πάνω στο οποίο ολοκληρώνουμε) είναι 0 εκτός αν $n = 0$ (οπότε το ολοκλήρωμα του συνημιτόνου δεν είναι 0).

---

6. Ένας ομογενής κυκλικός κύλινδρος ακτίνας R και ύψους h περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας του με ταχύτητα 1 στροφή ανά δευτερόλεπτο. Η πυκνότητα του κυλίνδρου (μάζα/όγκος) είναι ρ. Θέλουμε να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του κυλίνδρου.



Ξέρουμε ότι αν ένα σώμα μάζας m κινείται με ταχύτητα v τότε η κινητική του ενέργεια είναι $\frac{1}{2}mv^2$. Η δυσκολία εδώ είναι ότι διαφορετικά σημεία του κυλίνδρου κινούνται με διαφορετική ταχύτητα. Σημεία π.χ. πάνω στον άξονα περιστροφής έχουν ταχύτητα 0 ενώ τη μέγιστη ταχύτητα έχουν τα σημεία στην εξωτερική κατακόρυφη επιφάνεια.

Η στρατηγική μας είναι να χωρίσουμε τον κύκλο σε «κυλινδρικές φέτες» μέσα στις οποίες η ταχύτητα είναι σχεδόν σταθερή. Μια τέτοια φέτα είναι τα σημεία που απέχουν από τον άξονα περιστροφής απόσταση από r έως $r + \Delta r$, όπου το Δr είναι πολύ μικρό.

(1) Ποια είναι προσεγγιστικά η μάζα της φέτας αυτής;
(2) Ποια είναι προσεγγιστικά η ταχύτητα με την οποία κινούνται όλα τα σημεία της φέτας;
(3) Ποια είναι προσεγγιστικά η κινητική ενέργεια αυτής της φέτας; Εδώ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο $\frac{1}{2}mv^2$ αφού όλα τα σημεία κινούνται περίπου με την ίδια ταχύτητα.
(4) Ποια είναι η κινητική ενέργεια όλου του κυλίνδρου; Θα πρέπει να φτιάξουμε ένα ολοκλήρωμα βασιζόμενοι στο προηγούμενο ερώτημα.
(5) Χωρίς να υπολογίσετε κανένα ολοκλήρωμα δώστε ένα επιχείρημα που να δείχνει ότι η σωστή τάξη μεγέθους για την κινητική ενέργεια E του κυλίνδρου είναι η R^4, δηλ. ότι υπάρχουν σταθερές $C_1, C_2 > 0$ τ.ώ.

$$C_1 R^4 \le E \le C_2 R^4$$

αν όλες οι άλλες παράμετροι εκτός του R κρατηθούν σταθερές.

Λύση:

(1) Ο όγκος της φέτας είναι το εμβαδό της βάσης (ο δακτύλιος που είναι σκιασκμένος πράσινος) επί το ύψος h. Το εμβαδό της βάσης μπορούμε να το βρούμε ακριβώς ως διαφορά δύο κυκλικών δίσκων

$$E = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2.$$

Μπορούμε να συνεχίσουμε με τον ακριβή υπολογισμό ή μπορούμε σε αυτό που βρήκαμε να αγνοήσουμε τον όρο που είναι $O((\Delta r)^2)$ ο οποίος, όταν $\Delta r \to 0$, είναι πολύ μικρότερος από το Δr και δεν πρόκειται να επηρεάσει το ολοκλήρωμα που βρίσκουμε στο τελευταίο βήμα.

Θα κρατήσουμε λοιπόν ως προσέγγιση του εμβαδού της βάσης την ποσότητα

$$2\pi r \Delta r.$$

Παρατηρήστε ότι την ίδια ποσότητα θα βρίσκαμε αν εξ αρχής είχαμε προσεγγίσει το δακτύλιο με ένα ορθογώνιο μήκους $2\pi r$ (το μήκος του εσωτερικού κύκλου) και πλάτος Δr.

Με βάση αυτή την προσέγγιση για το εμβαδό του δακτυλίου έχουμε την προσέγγιση

$$2\pi r h \Delta r$$

για τον όγκος της φέτας.

(2) Αφού όλα τα σημεία της φέτας απέχουν προσεγγιστικά r από τον άξονα περιστροφής διανύουν μήκος $2\pi r$ κάθε δευτερόλεπτο άρα η ταχύτητά τους είναι προσεγγιστικά

$$2\pi r.$$

(Οι μονάδες μας είναι m/sec.)

(3) Η κινητική ενέργεια της φέτας είναι $\frac{1}{2}mv^2$ όπου m η συνολική της μάζα που είναι ρ επί τον όγκο, άρα το αποτέλεσμα είναι

$$\frac{1}{2}\rho 2\pi r h \Delta r (2\pi r)^2 = 2\pi^2 \rho h r^3 \Delta r.$$

(4) Θα πρέπει τώρα να προσθέσουμε τις κινητικές ενέργειες των φετών. Το ότι $\Delta r \to 0$ μεταφράζεται στο ότι το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα και παίρνουμε

$$\int_0^R 2\pi^2 \rho h r^3 \, dr = \frac{1}{2}\pi^2 \rho h R^4.$$

(5) Αν μάζα ενός κομματιού του κυλίνδρου δεν αλλάξει αλλά το κομμάτι μετατοπιστεί σε σημείο όπου να έχει μεγαλύτερη ταχύτητα τότε η κινητική ενέργεια του όλου αυξάνει. Αν λοιπόν μεταφέρουμε όλη τη μάζα του κυλίνδρου στο εξωτερικό τοίχωμα η κινητική ενέργεια αυξάνει. Όμως όλα τα σημεία της επιφάνειας του κυλίνδρου έχουν την ίδια ταχύτητα $2\pi R$ και επειδή ολόκληρη η μάζα του κυλίνδρου είναι ρ φορές τον όγκο του, άρα $(\rho\pi h)R^2$ παίρνουμε το άνω φράγμα

$$E \le \frac{1}{2}(\rho\pi h)R^2(2\pi R)^2 = C_1 R^4.$$

Για το κάτω φράγμα για το E παρατηρούμε (α) ότι αν πετάξουμε ένα κομμάτι του κυλίνδρου τότε χάνουμε κινητική ενέργεια και (β) ότι αν μεταφέρουμε ένα κομμάτι του κυλίνδρου σε ζώνη χαμηλότερης ταχύτητας τότε επίσης χάνουμε κινητική ενέργεια. Πετάμε λοιπόν το κομμάτι του κυλίνδρου απόστασης $\le R/2$ από τον άξονα περιστροφής και την υπόλοιπη μάζα (που είναι ακριβώς τα 3/4 της αρχικής μάζας, δηλ. $(\frac{3}{4}\rho\pi h)R^2)$ τη μεταφέρουμε ώστε να απέχει $R/2$ από τον άξονα περιστροφής. Έτσι παίρνουμε το κάτω φράγμα

$$E \ge \frac{1}{2}(\frac{3}{4}\rho\pi h)R^2)(\pi R)^2 = C_2 R^4.$$