Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές για μια συνάρτηση f που είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα;

- [ ] 1. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής τότε $\lim_n \int_n^{n+\frac{1}{n}} f(x)\,dx = 0$
- [ ] 2. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ φραγμένη τότε $\lim_n \int_n^{n+\frac{1}{n}} f(x)\,dx = 0$ ✓

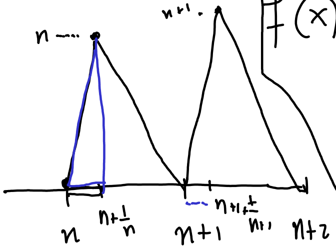
$$a_n = \int_n^{n+\frac{1}{n}} f(x)\,dx \xrightarrow{?} 0$$

$$\underbrace{\frac{-1}{x^2}}_{\downarrow 0}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) \to 1$$

$$|f(x)| \le M$$

$$\left|\int_n^{n+1/n} f(x)\,dx\right| \le \int_n^{n+\frac{1}{n}} M\,dx$$

$$= M\frac{1}{n} \to 0$$



$$\frac{1}{n}\cdot n\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = e^x$$

$$\int_n^{n+\frac{1}{n}} e^x\,dx = e^x\Big|_n^{n+\frac{1}{n}} = e^{n+\frac{1}{n}} - e^n$$

$$= \underbrace{e^n}_{\infty}\left(\underbrace{e^{1/n} - 1}_{0}\right) = \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{e^{-n}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{-x}}$$

$$= \lim \frac{\quad}{-e^{-x}}$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη παντού και $f(0)=0$. Η συνάρτηση f' είναι συνεχής. f''

Επίσης για $0 \le x \le 5$ ισχύει $f'(0)=0$ //

$$f'(x) \le x. \qquad f''(x) \leq x$$

Υπό αυτές τις υποθέσεις ποια είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το $f(5)$.

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\,dt$$

$$= \int_0^x f''(t)\,dt \leq \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

$$f'(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt$$

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt \leq \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{t^2}{2} \qquad \frac{x^3}{3}$$

$x=5 \rightarrow \underline{12.5}$

Το πολυώνυμο Taylor: μέγεθος σφάλματος

ξ

$a \quad x$

$$f(x) - P_{a,n}(x) = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \text{για κάποιο } \xi \text{ ανάμεσα στα } a, x.$$

- Αφού οι n παράγωγοι της R_n μηδενίζονται στο 0 έχουμε

$$R_n(x) = o((x-a)^n).$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow{x \to a} 0$$

- Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι $|f^{(n+1)}(x)| \le M$ τότε

βελτίωση

$$R_n(x) = O((x-a)^{n+1}).$$

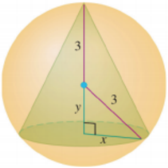
$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|(x-a)^{n+1}| \le \overbrace{\left(\frac{M}{(n+1)!}\right)}^{C}|(x-a)^{n+1}| \quad x \to a$$

$$\boxed{a \le \xi \le x}$$

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| \le ?$$

$$|f^{(n+1)}(\cdot)| \le M$$

6. Από τους κώνους που είναι εγγεγραμμένοι σε σφαίρα ακτίνας 3 ποιος έχει το μέγιστο όγκο;



Λύση: Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό του σχήματος.
Έχουμε

(2) $$x^2 + y^2 = 3. \quad 3^2$$

Παραγωγίζοντας αυτή τη σχέση παίρνουμε

(3) $$y' = -x/y.$$

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τον όγκο του κώνου που είναι $\frac{\pi}{3}x^2(3+y)$.

Θέτουμε την παράγωγο του όγκου ίση με το 0 και, χρησιμοποιώντας την (3) και την (2), καταλήγουμε στην ισότητα

$$y^2 + 2y - 3 = 0.$$

Αυτή έχει μόνο μία θετική ρίζα, το 1, οπότε $x = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}$ και ο όγκος είναι

$$\frac{\pi}{3}x^2(3+y) = \frac{\pi}{3}8 \cdot 4 = \frac{32\pi}{3}.$$

Ο όγκος της σφαίρας είναι $\frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi$ οπότε ο μέγιστος κώνος καταλαμβάνει ποσοστό

$$\frac{32}{3 \cdot 36} = 0.296296296$$

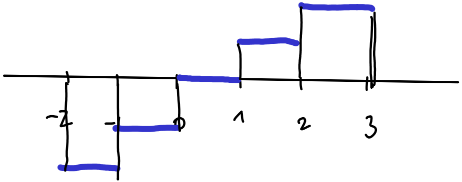
Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

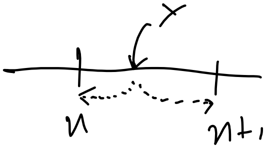
$$\int_{-2}^{3} \lfloor x \rfloor \, dx.$$

$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$

$x-1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$

$2+1+0-1-2 = 0$



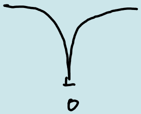


Σε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις έχουμε στο σημείο 0 τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο;

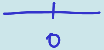
Select one or more:

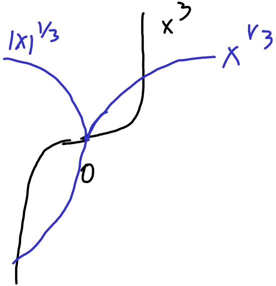
- ☐ 1. $|x|^{1/2}$ ✓
- ☐ 2. $|x|^{1/3}$ ✓
- ☐ 3. $\cancel{x^{1/3}}$

≥ 0



$\sqrt{|x|}$



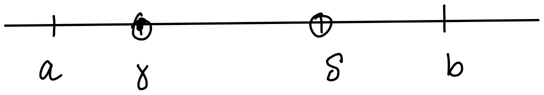


6.9.6. Έστω ότι η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ έχει δεύτερη παράγωγο στο (a, b) και ότι ισχύει $f(x)f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αν στο (a, b) περιέχονται δύο λύσεις της εξίσωσης $\underbrace{f(x)f'(x)}_{\varphi} = 0$ αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή ανάμεσα στις δύο αυτές λύσεις.

$$\varphi'(x) = \underbrace{f(x)f''(x)}_{\geqslant 0} + \underbrace{(f'(x))^2}_{\geqslant 0}$$

$$\varphi'(x) \geqslant 0$$

$$\varphi \uparrow$$



$$\varphi(\gamma) = f(\gamma)f'(\gamma) = f(\delta)f'(\delta) = 0 \quad (= \varphi(\delta))$$

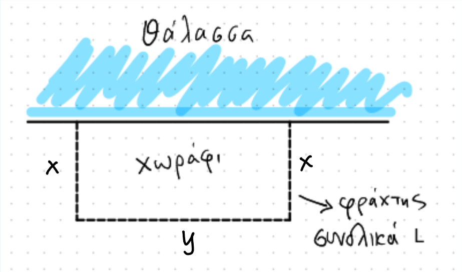
$$f f'' \geqslant 0$$

$$\varphi(x) = 0, \quad \boxed{\gamma \leq x \leq \delta}$$

$$2\underbrace{f(x)f'(x)}_{=\,(f^2)'} = 0 \quad —\shortparallel—$$

$$f^2(x) = g^2(x) \implies (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0$$

Κάποιος έχει αγοράσει περίφραξη συνολικού μήκους L και θέλει να περιφράξει ένα ορθογώνιο κομμάτι, ακριβώς πάνω στην ακρογιαλιά, οπότε δε χρειάζεται να το περιφράξει από τη μεριά της θάλασσας.



Χρησιμοποιεί δηλ. την περίφραξη συνολικού μήκους L που έχει για να περιφράξει το ορθογώνιο εκτός της μιας πλευράς του.

Ποιο είναι το μέγιστο εμβαδό που μπορεί να περιφράξει με αυτό τον τρόπο;

Η απάντησή σας είναι συνάρτηση του L.

$$2x+y=L \Rightarrow y=L-2x$$

$$E=x\cdot y=x(L-2x)$$

$$E'=0 \Rightarrow L-2x-2x=0$$

$$\Rightarrow L-4x=0$$

$$\Rightarrow x=L/4$$

$$y=L/2$$

$$E=\frac{L^2}{8}$$

Έστω

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{1}{2}x^3 + x^2 + 5.$$

Ποιο είναι το μήκος του μέγιστου διαστήματος στο οποίο η f είναι κοίλη;

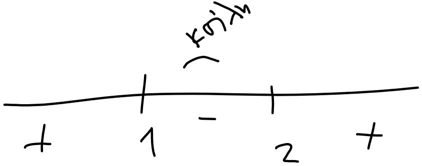
$$f'(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x$$

$$f''(x) = x^2 - 3x + 2 =$$

$$= x^2 - x - 2x + 2$$

$$= x(x-1) - 2(x-1) =$$

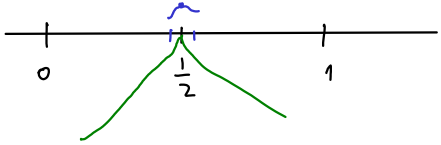
$$= (x-2)(x-1)$$



Ποιες από τις παρακάτω συνεπαγωγές ισχύουν για μια $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής;

- [ ] 1. $f(1/2) > 0 \implies$ υπάρχει $x \neq 1/2$ τ.ώ. $f(x) > 0$ ✓
- [ ] 2. $f(1/2) \geq 0 \implies$ υπάρχει $x \neq 1/2$ τ.ώ. $f(x) \geq 0$ ✗
- [ ] 3. $f(1/3) > \underbrace{f(1/3)^2}_{\geqslant 0} \implies$ υπάρχει $x \neq 1/3$ τ.ώ. $f(x) > 0$ ✓

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) > 0 \implies \exists\, x \neq \tfrac{1}{3} \quad f(x) > 0$$



Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$;

✓ 1. Αν $f(1) = 1, \ \ f(2) = 2$ τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τ.ώ. $\underline{f'(x) \geq 1}$.

✓ 2. Αν $f(1) = 1, \ \ f(2) \geq 2$ τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τ.ώ. $f'(x) \geq 1$.

✓ 3. Αν $f(1) = 1, \ \ f(2) = 1$ τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τ.ώ. $\underline{f'(x) \geq 0}$.

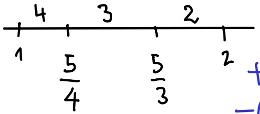
ΘΜΤ : $\exists\ \xi \in (1,2) : \underline{\underline{f'(\xi)}} = \underbrace{\frac{f(2)-f(1)}{2-1}} = \underline{\underline{1}}$

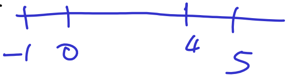
$f'(\xi) \geq 1$

$f'(\xi) = 0$

$$\cancel{\lfloor\alpha\rfloor + \lfloor\beta\rfloor = \lfloor\alpha+\beta\rfloor}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^3 \lfloor \overbrace{2x-1}^{y} \rfloor \, 2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{5} \lfloor y \rfloor \, dy = \frac{9}{2}$$





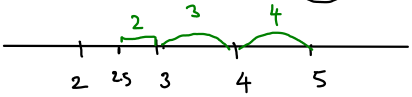
$$-1+0+1+2+3+4=9$$

$$1 \le x \le 2 \qquad \frac{1}{2} \le \frac{1}{x} \le 1$$

$$\int_1^2 \boxed{\lfloor \frac{5}{x} \rfloor} \, dx = \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{5}{12}\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 2$$

$$2.5 = \frac{5}{2} \le \frac{5}{x} \le 5 \qquad \frac{5}{4} \ge x \ge 1$$

$$\Updownarrow$$



$$4 \le \frac{5}{x} \le 5 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \ge \frac{x}{5} \ge \frac{1}{5}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \Bigg\| \quad \int f(x)\,dx = \ldots \qquad F(x)$$

$$\frac{1}{2}\int_1^3 \sin(y^2)\,2y\,dy = \frac{1}{2}\int_1^9 \sin u\,du =$$

$$\left.\begin{aligned} u &= y^2 \\ du &= 2y\,dy \end{aligned}\right| \quad = \frac{1}{2}(-\cos u)\Big|_1^9 = \frac{1}{2}(-\cos 9 + \cos 1)$$

$$\int_1^2 x\,\underbrace{e^x}\,dx = \int_1^2 x\,(e^x)'\,dx =$$

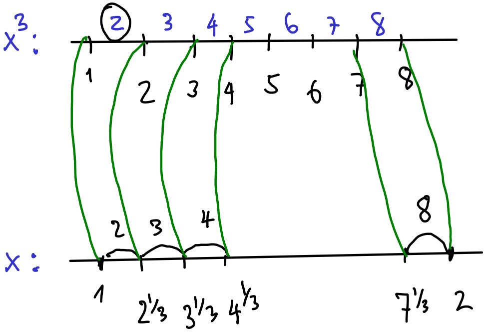
$$= x \cdot e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x\,dx$$

$$= 2 \cdot e^2 - e - \int_1^2 e^x\,dx$$

$$= 2e^2 - e - e^x \Big|_1^2 = 2e^2 - \cancel{e} - e^2 + \cancel{e}$$

$$= e^2$$

$$\int_1^2 \lceil x^3 \rceil \, dx = 2\cdot\left(2^{1/3}-1\right) + 3\left(3^{1/3}-2^{1/3}\right) + 4\left(4^{1/3}-3^{1/3}\right) +$$



$$\lfloor \sin x \rfloor \to -1$$
$$\lfloor \sin x \rfloor \to 0$$

Κάποια ολοκληρώματα με τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Χρήσιμοι τριγωνομετρικοί τύποι: $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}, \quad \sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$$

ή, γράφοντας $\boxed{u = \tan(x/2)}$ και $dx = \frac{2\,du}{1+u^2}$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

Εύκολα αποδεικνύονται με τους τριγωνομετρικούς τύπους:

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x, \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$u = \tan\frac{x}{2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1+u^2}{2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2}$$

$$u^2 = \tan^2\frac{x}{2} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$u^2\cos^2\frac{x}{2} = 1 - \cos^2\frac{x}{2}$$

$$dx = du\,\frac{2}{1+u^2}$$

$$(1+u^2)\cos^2\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+u^2}$$

Το πολυώνυμο Taylor: μέγεθος σφάλματος

ξ

$a \quad x$

$$\underline{f(x) - P_{a,n}(x)} = \underline{R_n(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \text{για κάποιο } \xi \text{ ανάμεσα στα } a, x.$$

- Αφού οι n παράγωγοι της R_n μηδενίζονται στο 0 έχουμε

$$R_n(x) = o((x-a)^n).$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow{x \to a} 0$$

- Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι $\boxed{|f^{(n+1)}(x)| \le M}$ τότε

βελτίωση

$$R_n(x) = O((x-a)^{n+1}).$$

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|(x-a)^{n+1}| \le \overbrace{\left(\frac{M}{(n+1)!}\right)}^{C}|(x-a)^{n+1}| \overset{x\to a}{=} O\left((x-a)^{n+1}\right)$$

$$\boxed{R_n(x) = O\left((x-a)^{n+1}\right)}$$

$f = O(g)$: $f \le C \cdot g$

$f = o(g)$: $\frac{f}{g} \to 0$

$$\boxed{R_n(x) = o\left((x-a)^n\right)} \quad \text{όταν } x \to a$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \longrightarrow 0$$

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$a_n = o(1)$$

$$a_n = \frac{1}{\ln n}$$

$$\frac{1}{\ln n} < \frac{c}{n}$$

Πάτε στο μαγαζί (e-shop, αυτές τις μέρες) να αγοράσετε μια προσέγγιση για την αγαπημένη σας συνάρτηση. Σας ενδιαφέρει ιδιαίτερα να προσεγγίζετε καλά τη συνάρτησή σας, $f(x)$, όταν το x είναι πολύ κοντά στο 1. $x \to 1$

Εκεί βλέπετε προς πώληση τρεις προσεγγίσεις για τη συνάρτησή σας. Κάθε μια τους είναι μια συνάρτηση $a(x)$ η οποία είναι εύκολα υπολογίσιμη και προσφέρει κάποια εγγύηση ακρίβειας (μικρού σφάλματος) όσον αφορά την προσέγγιση της $f(x)$ κοντά στο $x = 1$.

Διατάξτε αυτές τις τρεις προς πώληση προσεγγίσεις της $f(x)$ σε αύξουσα σειρά των χρημάτων που θα ήσασταν διατεθειμένος να δώσετε για την κάθε μία.

$\square \le \square \le \square$.

Τοποθετήστε τις παρακάτω προσεγγίσεις στις σωστές θέσεις:

1. Προσέγγιση $a_1(x)$ με εγγύηση σφάλματος $O(|1-x|^4)$ για $x \to 1$.
2. Προσέγγιση $a_3(x)$ με εγγύηση σφάλματος $o(|1-x|^2)$ για $x \to 1$.
3. Προσέγγιση $a_2(x)$ με εγγύηση σφάλματος $O(|1-x|^3)$ για $x \to 1$.

$$R_i(x) = f(x) - a_i(x) \quad i=1,2,3$$

$$\$\$ \; R_1(x) = O(|1-x|^4) \qquad R_1(x) \le C_1 |1-x|^4$$

$$\$ \; R_2(x) = O(|1-x|^3) \qquad R_2(x) \le C_2 |1-x|^3$$

$$¢ \; R_3(x) = o(|1-x|^2) \qquad \frac{R_3(x)}{|1-x|^2} \to 0$$

$$\frac{R_1(x)}{|1-x|^4} \le C_1 \quad ✓ \qquad \frac{R_2(x)}{|1-x|^3} \le C_2 \quad ✓$$

$$\frac{|1-x|^{2.1}}{|1-x|^3} = \frac{1}{\underbrace{|1-x|^{0.9}}_{\downarrow}} \to +\infty$$

$$\frac{|1-x|^{2.1}}{|1-x|^2} = |1-x|^{0.1} \to 0$$

Η διαφορική εξίσωση

$$y'(t) = \underbrace{sy^2(t)}$$

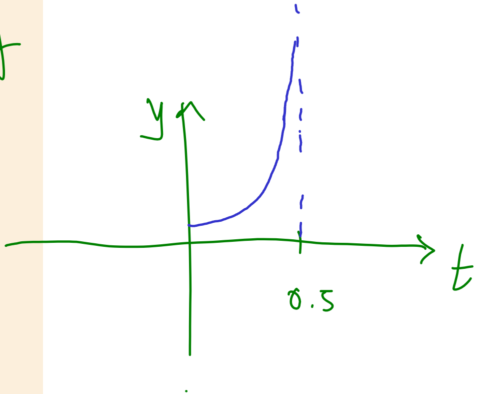
$y' = ky$

λύνεται πολύ εύκολα:

$$\frac{y'}{y^2} = s \implies \left(\frac{-1}{0.5}\right)' = s \implies \frac{-1}{0.5} = st + C \implies y(t) = \frac{-1}{C+st}.$$

Για $t = 0$ έχουμε $y = 200$ άρα $C = -1/200 = 0.005$. Έχουμε λοιπόν

$$y(t) = \frac{1}{\underbrace{0.005} - \underbrace{0.01t}}.$$



Πρόκειται φυσικά για μια αύξουσα συνάρτηση του t όμως αυτή απειρίζεται (έχει όριο το $+\infty$) για $t = 0.5$ χρόνια. Αυτό σημαίνει ότι ότι κεφάλαιο και να υπήρχε στο χρηματοκιβώτιο το χρόνο 0 της κατάθεσης αυτό σίγουρα θα έχει εκμηδενιστεί **πριν** από 0.5 χρόνια (όσο πιο μικρό το κεφάλαιο τόσο νωρίτερα θα συμβεί αυτό αλλά πάντως πριν από 0.5 χρόνια).

Η διαφορική εξίσωση

$$y'(t) = sy^2(t)$$

λύνεται πολύ εύκολα:

$$\frac{y'}{y^2} = s \implies \left(\frac{-1}{y}\right)' = s \implies \frac{-1}{y} = st + C \implies y(t) = \frac{-1}{C + st}.$$

Για $t = 0$ έχουμε $y = 200$ άρα $C = -1/200 = 0.005$. Έχουμε λοιπόν

$$y(t) = \frac{1}{0.005 - 0.01t}.$$

Πρόκειται φυσικά για μια αύξουσα συνάρτηση του t όμως αυτή απειρίζεται (έχει όριο το $+\infty$) για $t = 0.5$ χρόνια. Αυτό σημαίνει ότι ότι κεφάλαιο και να υπήρχε στο χρηματοκιβώτιο το χρόνο 0 της κατάθεσης αυτό σίγουρα θα έχει εκμηδενιστεί **πριν** από 0.5 χρόνια (όσο πιο μικρό το κεφάλαιο τόσο νωρίτερα θα συμβεί αυτό αλλά πάντως πριν από 0.5 χρόνια).