---

1. Ορίζουμε τις ακολουθίες

$$a_n = \int_1^n \frac{dx}{x^2}, \quad b_n = \int_1^n \frac{dx}{x}, \quad c_n = \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x^2},$$

$$d_n = \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x}, \quad e_n = \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x^{1/2}}.$$

Όλες οι αυτές ακολουθίες είναι θετικές και μονότονες. Ποιες από αυτές συγκλίνουν σε πραγματικό αριθμό και ποιες στο $+\infty$; (Ισοδύναμα, ποιες είναι φραγμένες και ποιες όχι;)

Λύση: Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις ακολουθίες αυτές υπολογίζοντας τα αντίστοιχα ολοκληρώματα. Προκύπτει ότι

$$a_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad b_n = \ln n, \quad c_n = n-1, \quad d_n = \ln n, \quad e_n = 2 - \frac{2}{n^{1/2}}.$$

Άρα φραγμένες είναι μόνο οι a_n, e_n.

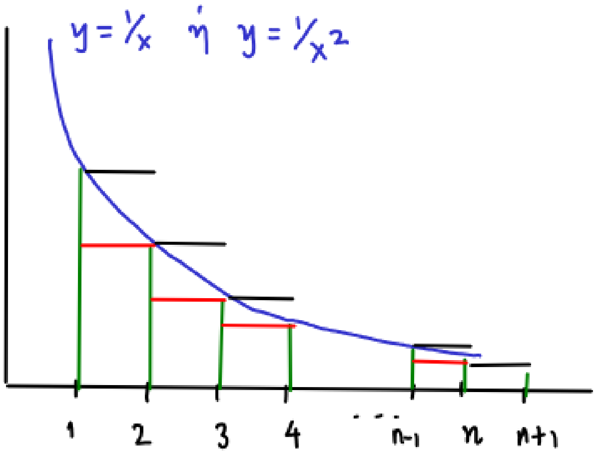
---

2. Ορίζουμε τις ακολουθίες

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad b_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Δείξτε ότι $a_n \to +\infty$ ενώ η b_n είναι φραγμένη, και άρα συγκλίνουσα σε πραγματικό αριθμό (προφανώς και οι δύο ακολουθίες είναι αύξουσες).

Λύση: Θα συγκρίνουμε τις ακολουθίες a_n και b_n με τα ολοκληρώματα $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$ και $\int_1^n \frac{dx}{x^2}$ τα οποία, έχουμε δει στην άσκηση 1, τείνουν στο $+\infty$ και σε πραγματικό αριθμό αντίστοιχα.



Ερμηνεύουμε κάθε προσθετέο στα a_n, b_n ως ένα εμβαδό ορθογωνίου στο παραπάνω σχήμα.

Για την ακολουθία a_n θεωρούμε τη μπλε καμπύλη να είναι το γράφημα της $y = 1/x$.

Οι όροι της a_n, είναι τα εμβαδά των ορθογωνίων, όλα με βάση μήκους 1, των οποίων η άνω γραμμή είναι μαύρη. Πιο συγκεκριμένα, το 1 είναι το εμβαδό του ορθογωνίου πάνω από το [1, 2] και κάτω από την αντίστοιχη μαύρη γραμμή, το 1/2 είναι το εμβαδό του ορθογωνίου με βάση το διάστημα [2, 3] καί κάτω από την αντίστοιχη μαύρη γραμμή, το 1/3 είναι το εμβαδό του ορθογωνίου με βάση το διάστημα [3, 4], κλπ, και, τέλος, το $1/n$ είναι το εμβαδό του ορθογωνίου πάνω από το $[n, n+1]$.

Προκύπτει έτσι, αφού τα ορθογώνια αυτά είναι όλα πάνω από τη γραμμή $y = 1/x$, ότι

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \ge \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \to +\infty,$$

άρα $a_n \to +\infty$.

Ομοίως τους όρους της b_n τους ερμηνεύουμε ως τα εμβαδά των ορθογωνίων με βάση τα διαστήματα $[i-1, i]$ και άνω πλευρά την κόκκινη γραμμή (η μπλε καμπύλη τώρα είναι η συνάρτηση $y = 1/x^2$), για $i = 2, \ldots, n$ Αφού όλα αυτά τα ορθογώνια είναι κάτω από την καμπύλη $y = 1/x^2$ έπεται ότι

$$b_n - 1 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \le \int_1^n \frac{dx}{x^2},$$

και επειδή το δεξί μέλος, δείξαμε στην άσκηση 1, είναι φραγμένη ακολουθία έπεται ότι και η b_n είναι φραγμένη.

---

3. Ας είναι f μια φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού αποδείξτε τις εξής παραλλαγές του (εδώ $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της f).

(a) Αν το όριο $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ υπάρχει τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο a και $F'(a) = L$.

(b) Αν τα πλευρικά μόνο όρια της f υπάρχουν στο a και είναι

$$\lim_{x\to a-} f(x) = L, \quad \lim_{x\to a+} f(x) = R$$

τότε υπάρχουν και οι πλευρικές παράγωγοι της F στο a και μάλιστα

$$\lim_{h\to 0-} \frac{1}{h}(F(a+h) - F(a)) = L, \quad \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(F(a+h) - F(a)) = R.$$

Λύση: (a) Ορίζουμε μια νέα συνάρτηση ϕ που ισούται με την f παντού εκτός ίσως από το a όπου $\phi(a) = L$. Έπεται ότι (α) η ϕ είναι συνεχής στο a, (β) η ϕ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αφού διαφέρει από την f το πολύ σε ένα σημείο και (γ) το ολοκλήρωμα της ϕ σε οποιοαδήποτε διάστημα ισούται με αυτό της f, για τον ίδιο λόγο όπως και το (β). Άρα η F είναι και αόριστο ολοκλήρωμα της ϕ και αφού η ϕ είναι συνεχής στο a μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεμελιώδες Θεώρημα και παίρνουμε ότι η $F'(a)$ υπάρχει και ισούται με $\phi(a) = L$.

(b) Θα αποδείξουμε ότι η από δεξιά παράγωγος ισούται με R. Το άλλο μισό της άσκησης βγαίνει τελείως ανάλογα. Ορίζουμε και πάλι μια νέα συνάρτηση $\psi(x)$ να ισούται με την f παντού στο $(a, +\infty)$ και να ισούται με R στο $(-\infty, a]$. Είναι φανερό και πάλι ότι η ψ είναι συνεχής στο a. Επίσης το πηλίκο διαφορών αορίστου ολοκληρώματος της ψ στο a για θετικό h είναι ίδιο με αυτό της f επειδή οι δύο συναρτήσεις διαφέρουν μόνο σε ένα σημείο:

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(F(a+h) - F(a)) = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} \psi(t)\,dt = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(\Psi(a+h) - \Psi(a))$$

όπου έχουμε συμβολίσει με Ψ ένα αόριστο ολοκλήρωμα της ψ. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα έπεται ότι το τελευταίο όριο ισούται με $\psi(a) = R$.

---

4. Δείξτε ότι υπάρχει Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt = e^x - 1$ αλλά δεν υπάρχει Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $\int_0^x g(t)\,dt = e^x$.

Λύση: Η f είναι φυσικά η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Αν υπήρχε η g με την υποτιθέμενη ιδιότητα τότε θα ίσχυε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^x g(t) - f(t)\,dt = 1.$$

Αυτό όμως αντιφάσκει με την ιδιότητα $\int_a^a \phi(t)\,dt = 0$ που ισχύει για κάθε ολοκληρώσιμη ϕ άρα και για την $g - f$.

---

5. Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής παντού και η $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη παντού υπολογίστε την παράγωγο της συνάρτησης

$$A(x) = \int_0^{\phi(x)} f(t)\,dt.$$

Λύση: Αν είναι $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ τότε $A(x) = F(\phi(x))$ άρα, από το Θεμελιώδες Θεώρημα,

$$A'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x).$$