Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς. Αν έχετε πρόβλημα να λύσετε κάποια άσκηση ζητήστε βοήθεια στο Forum του μαθήματος. Οι λύσεις θα δημοσιεύονται 1-2 βδομάδες μετά από την ανάρτηση του κάθε Φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Χρησιμοποιώντας τα φράγματα

$$0 \le \sin^2 x \le 1$$

δώστε ένα κάτω και ένα άνω φράγμα για το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx$$

χωρίς να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα.

2. Στην άσκηση αυτή παίρνουμε **ως ορισμό** της συνάρτησης $\ln x$ τον τύπο

$$lnx = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad \text{για } x > 0,$$

και προσπαθούμε να αποδείξουμε μερικές από τις γνωστές ιδιότητες της συνάρτησης ln.

(1) Δείξτε $\ln 1 = 0$.

(2) Δείξτε ότι $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$. Κάντε την αλλαγή μεταβλητής $z = xt$ στο ολοκλήρωμα $\int_1^{1/x} \frac{dt}{t}$.

(3) Δείξτε ότι $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$. Κάντε μια παρόμοια αλλαγή μεταβλητής όπως και στο (2).

(4) Δείξτε ότι $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Χρησιμοποιήστε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.

(5) Δείξτε ότι $\ln(x^a) = a\ln x$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Υποθέστε γνωστό ότι $(x^a)' = ax^{a-1}$ και κάντε την αλλαγή μεταβλητής $t = y^a$ στο ολοκλήρωμα $\int_1^{x^a} \frac{dt}{t}$.

3. Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι η f είναι παντού 0 αν και μόνο αν

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0 \qquad \text{για κάθε } g : (a,b) \to \mathbb{R} \text{ συνεχή.} \tag{1}$$

4. Αν $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες ορίζουμε το *εσωτερικό τους γινόμενο* να είναι η ποσότητα

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Δύο τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται *ορθογώνιες* αν $\langle f, g\rangle = 0$.

Δείξτε το Πυθαγόρειο θεώρημα για ολοκληρώματα: αν f, g ορθογώνιες και $h = f + g$ τότε

$$\int_a^b h^2(x)\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx$$

Δείξτε επίσης ότι στο διάστημα $[0,1]$ οι συναρτήσεις $\cos 2\pi x$ και $\sin 2\pi x$ είναι ορθογώνιες.

5. Με τον ορισμό ορθογωνιότητας συναρτήσεων που δώσαμε στο πρόβλημα 4 δείξτε ότι στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχουμε τις εξής σχέσεις ορθογωνιότητας

(1) $\langle\cos(mx), \sin(nx)\rangle = 0$ για κάθε $m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$
(2) $\langle\cos(mx), \cos(nx)\rangle = 0$ για κάθε $m \neq n$, $m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$
(3) $\langle\sin(mx), \sin(nx)\rangle = 0$ για κάθε $m \neq n$, $m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$

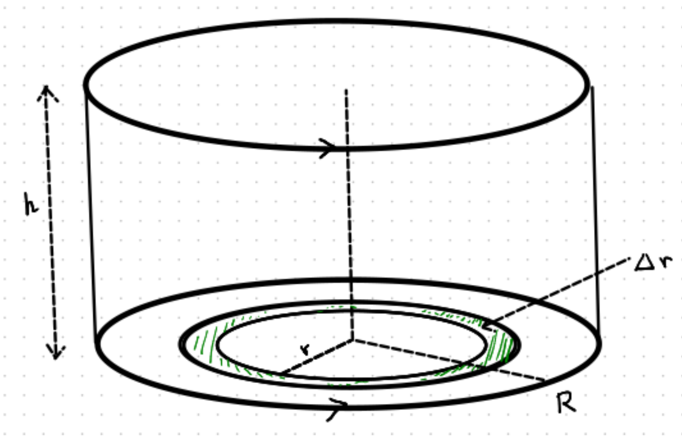
Χρησιμοποιήστε τους τριγωνομετρικούς τύπους

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

6. Ένας ομογενής κυκλικός κύλινδρος ακτίνας R και ύψους h περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας του με ταχύτητα 1 στροφή ανά δευτερόλεπτο. Η πυκνότητα του κυλίνδρου (μάζα/όγκος) είναι ρ. Θέλουμε να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του κυλίνδρου.



Ξέρουμε ότι αν ένα σώμα μάζας m κινείται με ταχύτητα v τότε η κινητική του ενέργεια είναι $\frac{1}{2}mv^2$. Η δυσκολία εδώ είναι ότι διαφορετικά σημεία του κυλίνδρου κινούνται με διαφορετική ταχύτητα. Σημεία π.χ. πάνω στον άξονα περιστροφής έχουν ταχύτητα 0 ενώ τη μέγιστη ταχύτητα έχουν τα σημεία στην εξωτερική κατακόρυφη επιφάνεια.

Η στρατηγική μας είναι να χωρίσουμε τον κύκλο σε «κυλινδρικές φέτες» μέσα στις οποίες η ταχύτητα είναι σχεδόν σταθερή. Μια τέτοια φέτα είναι τα σημεία που απέχουν από τον άξονα περιστροφής απόσταση από r έως $r + \Delta r$, όπου το Δr είναι πολύ μικρό.

(1) Ποια είναι προσεγγιστικά η μάζα της φέτας αυτής;
(2) Ποια είναι προσεγγιστικά η ταχύτητα με την οποία κινούνται όλα τα σημεία της φέτας;
(3) Ποια είναι προσεγγιστικά η κινητική ενέργεια αυτής της φέτας; Εδώ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο $\frac{1}{2}mv^2$ αφού όλα τα σημεία κινούνται περίπου με την ίδια ταχύτητα.
(4) Ποια είναι η κινητική ενέργεια όλου του κυλίνδρου; Θα πρέπει να φτιάξουμε ένα ολοκλήρωμα βασιζόμενοι στο προηγούμενο ερώτημα.