$f(x) = \frac{1}{x}$ συνεχής στο 1

$a_n \to a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$

$x \to 1 \Rightarrow f(x) \to 1$

$\boxed{\epsilon - \delta}$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

$|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-1| < \epsilon$

$1-\delta < x < 1+\delta < \frac{1}{1-\epsilon}$ $\quad \left|\frac{1}{x} - 1\right| < \epsilon$

$1-\epsilon < \frac{1}{x} < 1+\epsilon$

$1+\delta < \frac{1}{1-\epsilon}$

$1-\delta > \frac{1}{1+\epsilon}$

$\frac{1}{1+\epsilon} > x > \frac{1}{1+\epsilon}$

$\delta < \frac{1}{1-\epsilon} - 1, \quad \delta < 1 - \frac{1}{1+\epsilon}$

ακολουθίες

$x_n \to 1 \Rightarrow f(x_n) \to 1$

$\Downarrow$

$f(x_n) = \frac{1}{x_n} \to 1$

$\boxed{\epsilon < 1}$

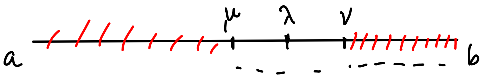
$$\lim_{x \to +\infty} f(\underline{\underline{x}}) = A \;//$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n} f(\underline{\underline{n}}) = A$$

$$X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$$

$\frac{a+b}{2}$



$\underbrace{f(a) < \nu < f(b)}$

$\Longrightarrow \quad \exists\, \underset{=}{x} \in [a,b] : \; f(x) = \nu$

$\underline{f(\mu) < \nu}$ $\qquad$ $\underline{f(\mu) > \nu}$

$f(\mu) < \underset{=}{\nu} < f(b)$ $\qquad$ $f(a) < \nu < f(\mu)$

$\underline{f(\nu) < \nu}$ $\quad \cdot \quad \boxed{f(\mu) < \nu < f(\nu)}$ $\qquad f(x) = \nu$

$f(\lambda) < \nu \qquad\qquad \nu < f(\lambda)$

$f(x) \leq \nu \qquad a_n \longrightarrow x \longleftarrow b_n \qquad f(x) \geq \nu$

$\nu \geq f(a_n) \longrightarrow f(x) \longleftarrow f(b_n) \geq \nu$

$a_0 = a, \quad b_0 = b$ πρώτο διάστημα

$[a_1, b_1]$ $\quad \cdot \; a_n \uparrow \quad b_n \downarrow$

$[a_2, b_2]$

$[a_3, b_3]$

$\vdots$

$a_n \to x$

$\qquad\quad \shortparallel$

$b_n \to y$

$\underbrace{b_{n+1} - a_{n+1}}_{\downarrow \; 0} = \frac{b_n - a_n}{2}$

Σωστό ή λάθος;

Αν $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ τότε

$$\lim_{x\to\infty} f(f(x)) = +\infty.$$

Υποθέστε ότι η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

$y = f(x)$

$x \to +\infty \qquad y \to +\infty$

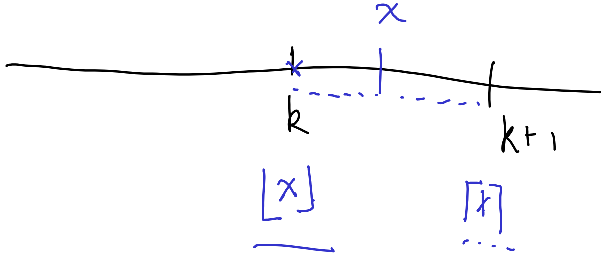
$f(y) \longrightarrow +\infty$

2. Αποδείξτε ότι

$$(a)\ \lim_{x\to\infty} \lfloor 1/x \rfloor = 0,\ (b)\ \lim_{x\to-\infty} \lfloor 1/x \rfloor = -1,\ (c)\ \lim_{x\to\infty} \lceil 1/x \rceil = 1,\ (d)\ \lim_{x\to-\infty} \lceil 1/x \rceil = 0.$$

Λύση: Αν $x > 1$ τότε $0 < \frac{1}{x} < 1$ οπότε $\lfloor 1/x \rfloor = 0$ και $\lceil 1/x \rceil = 1$ και άρα ισχύουν τα όρια στα (a) και (c) αφού οι συναρτήσεις που δίνονται εκεί είναι τελικά σταθερές.

Ομοίως, αν $x < -1$ τότε $-1 < \frac{1}{x} < 0$ οπότε $\lfloor 1/x \rfloor = -1$ και $\lceil 1/x \rceil = 0$, και άρα ισχύουν τα όρια στα (b) και (d) αφού οι συναρτήσεις εκεί είναι τελικά (όταν κινούμαστε προς το $-\infty$) σταθερές.



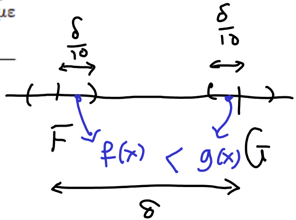
5. (a) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$ δείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ τ.ώ. αν $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ και $\boxed{x \neq a}$ τότε $f(x) < g(x)$.

(b) Αν υποθέσουμε απλά ότι $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$ δείξτε ότι δε μπορούμε από αυτό να συμπεράνουμε ότι $f(x) \le g(x)$ σε κάποιο διάστημα γύρω από το a.

Λύση: (a) Έστω $F = \lim_{x\to a} f(x)$ και $G = \lim_{x\to a} g(x)$. Ορίζουμε $\delta = G - F > 0$.

Αφού $f(x) \to F$ για $x \to a$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ τ.ώ.

$f(x) \to F$



$$0 < |x-a| < \delta_1 \implies |f(x) - F| < \boxed{\delta/10.} = \varepsilon$$

Επίσης, αφού $g(x) \to G$ υπάρχει $\delta_2 > 0$ τ.ώ.

$$0 < |x-a| < \delta_2 \implies |g(x) - G| < \delta/10.$$

Παίρνουμε $\epsilon = \boxed{\min\{\delta_1, \delta_2\}}$. Αν $0 < |x-a| < \epsilon$ ισχύει η υπόθεση σε κάθε μια από τις δύο παραπάνω συνεπαγωγές και άρα ισχύει

$$|f(x) - F| < \delta/10, \quad |g(x) - G| < \delta/10.$$

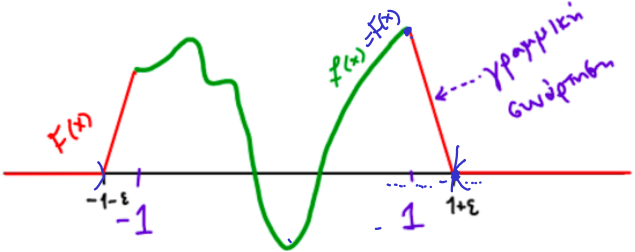
Από αυτές τις δύο ανισότητες έπεται ότι $f(x) < g(x)$.

(b) Αρκεί να δώσουμε ένα παράδειγμα όπου η ισχύει η υπόθεση

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

χωρίς να ισχύει η ανισότητα $f(x) \le g(x)$ σε κανένα διάστημα γύρω από το a. Πάρτε π.χ. $f(x) = (x-a)^2$ και $g(x) = -(x-a)^2$.

4. Αν $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, συνεχής, τέτοια ώστε (α) $F(x) = f(x)$ για $x \in [-1,1]$ και (β) $F(x) = 0$ αν $x \le -1-\epsilon$ ή $x \ge 1+\epsilon$.



F επέκταση της f

$\to [-1, 1]$ $\quad F = f$

$\to [1+\varepsilon, +\infty)$, $(-\infty, -1-\varepsilon]$ $\quad F = 0$

5. (a) Δείξτε ότι η συνάρτηση του Dirichlet $D(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός αριθμός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος αριθμός} \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής πουθενά.

(b) Κατασκευάστε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να είναι συνεχής μόνο στο 0.

Χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

$$\chi_A(x) = \mathbb{1}(x \in A)$$

A^c = συμπλήρωμα του A

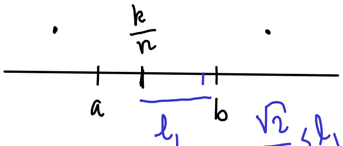
$x \in A^c \iff x \notin A$

$\mathbb{Q}$ · πυκνό σύνολο ✓ : σε κάθε διάστημα υπάρχει στοιχείο του

↑ ρητοί

άρρητοι

$\mathbb{Q}^c$ πυκνό σύνολο :



$\ell = b - a$

$\frac{k}{n}$ $\quad n \in \mathbb{N}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{n > \frac{1}{\ell}} \iff \frac{1}{n} < \ell$

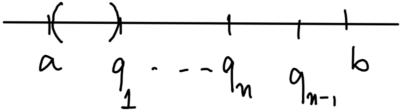
$\frac{\sqrt{2}}{N} < \ell_1$

$N > \frac{\sqrt{2}}{\ell_1}$

$\frac{k}{n} + \frac{\sqrt{2}}{N}$ άρρητος

$\frac{k}{n} + \frac{\sqrt{2}}{N} = \frac{\mu}{\nu} \Rightarrow$

$kN\nu + n\nu\sqrt{2} = \mu n N \Rightarrow \sqrt{2}$ = κλάσμα



Έστω $q_1 \in (a,b) \cap \mathbb{Q}$

τομή

Έστω $q_2 \in (a, q_1) \cap \mathbb{Q}$

--- $q_3 \in (a, \min\{q_1, q_2\}) \cap \mathbb{Q}$

$q_4 \in (a, \min\{q_1, q_2, q_3\}) \cap \mathbb{Q}$

$\vdots$

Για κάθε n μπορώ να βρω n ρητούς σε κάθε διάστημα

Έστω $q_1, \dots, q_n \in (a,b)$.

Υπάρχει $q_{n+1} \in (a,$ ελάχιστο από τους $q_1, \dots, q_n)$

5. (a) Δείξτε ότι η συνάρτηση του Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός αριθμός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος αριθμός} \end{cases}$$

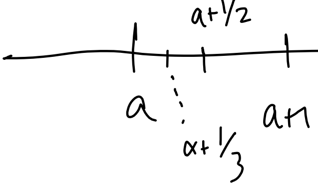
δεν είναι συνεχής πουθενά.

(b) Κατασκευάστε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να είναι συνεχής μόνο στο 0.

$\forall a \in \mathbb{R}: \lim_{x \to a} D(x)$ δεν υπάρχει

$\exists\, q_n \to a \quad (q_n \in \mathbb{Q})$

$\exists\, \alpha_n \to a \quad (\alpha_n \in \mathbb{Q}^c)$



D συνεχής στο a;

$1 = D(q_n) \to D(a)$

$0 = D(\alpha_n) \to D(a)$

$q_1, \alpha_1 \in (\alpha, \alpha+1)$

$q_2, \alpha_2 \in (\alpha, \alpha+\frac{1}{2})$

$q_3, \alpha_3 \in (\alpha, \alpha+\frac{1}{3})$

$\vdots$

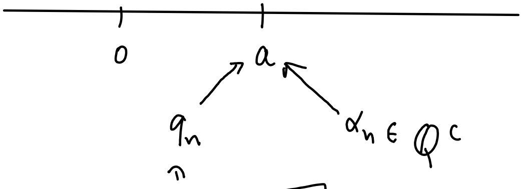
$q_n, \alpha_n \in (\alpha, \alpha+\frac{1}{n}) \implies q_n, a_n \to a$

5. (a) Δείξτε ότι η συνάρτηση του Dirichlet

$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{αν } x \text{ ρητός αριθμός}\\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος αριθμός}\end{cases}$$

δεν είναι συνεχής πουθενά.

(b) Κατασκευάστε μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που να είναι συνεχής μόνο στο 0.



$$\boxed{0} = \lim f(\alpha_n) = f(\alpha)$$

$$\boxed{0 \neq a} = \lim_n q_n = \lim f(q_n) = f(\alpha)$$

$$f(x) = x\,\underline{D(x)}$$

$$f(0) = 0$$

$$\underline{x \to 0}$$

$$\underbrace{|x D(x)|}_{\downarrow\ 0} = \begin{cases} \overbrace{|x\cdot 1|}^{|x|} \\ |x \cdot 0| \to 0 \end{cases} \le |x|$$

$$\underset{\downarrow\ 0}{0} \le \underset{\downarrow\ 0}{|f(x)|} \le \underset{\downarrow\ 0}{|x|}$$

6. (a) Αν $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει $\boxed{f^2(x) = g^2(x) \neq 0}$ αποδείξτε ότι είτε ισχύει για όλα τα $x \in (a, b)$ η ισότητα $f(x) = g(x)$ είτε για όλα ισχύει η ισότητα $f(x) = -g(x)$. Δείξτε ότι αυτό δεν είναι απαραίτητα σωστό αν παραλείψουμε την υπόθεση ότι οι f, g δε μηδενίζονται.

(b) Αν $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί για κάθε $x > 0$ τη σχέση $f^2(x) = x$ δείξτε ότι είτε ισχύει για κάθε $x > 0$ η ισότητα $f(x) = \sqrt{x}$ είτε για κάθε τέτοιο x ισχύει η ισότητα $f(x) = -\sqrt{x}$.

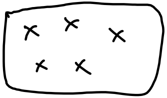
$$f^2(x) = g^2(x) \quad \underline{\forall x \in (a,b)} \implies 2\ \underline{\big(f(x) = g(x),\ \forall x \in (a,b)\big) \text{ ή } \big(f(x) = -g(x),\ \forall x \in (a,b)\big)}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{f^2(x) - g^2(x) = 0} \implies \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) = 0 \implies$$

$$\implies f(x) = g(x) \text{ ή } f(x) = -g(x)$$

✓ 1 $\underline{\forall x \in (a,b) : f(x) = g(x) \text{ ή } f(x) = -g(x)}$



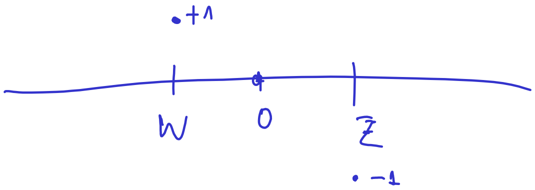
1) $\forall x \in$ δωμάτιο : $x =$ άνδρας ή x γυναίκα

2) ($\forall x \in$ δωμ. : $x =$ άνδρας) ή ($\forall x \in$ δωμ. : x γυναίκα)

$\forall x: \quad f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x) \implies \forall x: h(x) = 1$ ή $h(x) = -1$

$\forall x \quad f(x), g(x) \neq 0$

$h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ συνεχής, παίρνει τιμές $\pm 1 \implies h(x)$ σταθερή



$f^2(x) = g^2(x)$

$f(x) = x$

$g(x) = |x|$ στο $(-1, 1)$

(b) Αν $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί για κάθε $x>0$ τη σχέση $f^2(x)=x$ δείξτε ότι είτε ισχύει για κάθε $x>0$ η ισότητα $f(x)=\sqrt{x}$ είτε για κάθε τέτοιο x ισχύει η ισότητα $f(x)=-\sqrt{x}$.

συνεχής

$\sqrt{x}$ = η δεξιά τετρ. ρίζα του x

$$f^2(x)=x \to \begin{cases} f(x)=\sqrt{x} \quad \forall x \\ f(x)=-\sqrt{x} \quad \forall x \end{cases}$$

$g(x)=\sqrt{x}$

$$f^2(x)=g^2(x)$$

$\forall x \quad f(x)=g(x)$ $\qquad$ $\forall x \quad f(x)=-g(x)$

$\forall x \quad f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad$ $\forall x \quad f(x)=-\sqrt{x}$

Ποια από τα παρακάτω όρια υπάρχουν;

Select one or more:

☐ 1. $\lim_{x\to 1} \sin\frac{1}{(x-1)^2}$ ✗

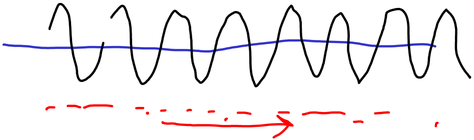
☐ 2. $\lim_{x\to 1}(x-1)\sin\frac{1}{(x-1)^2}$ ✓

$\lim_{x\to 1}(x-1) \to 0$

$\sin\frac{1}{(x-1)^2} \to$ φραγμένο

$(x-1)^2 \to 0+$

$\frac{1}{(x-1)^2} \to +\infty$



$a_n \to 1 \qquad f(a_n) = 1$

$b_n \to 1 \qquad f(b_n) = -1$

$f(a_n)=1 \iff \sin\frac{1}{(a_n-1)^2} = 1 \iff \frac{1}{(a_n-1)^2} = \frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\iff \underbrace{a_n}_{\to 1} = \sqrt{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}} + 1$

$b_n = \sqrt{\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}} + 1$

$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής σε κάθε $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$

$\Longrightarrow$ f φραγμένη στο $[-1, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$