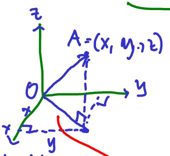
Cauchy-Schwarz

• $\underbrace{(a_1,\dots,a_n)}_{a}$, $\underbrace{(b_1,\dots,b_n)}_{b}$:

$$|a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n| \le \sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}\,\sqrt{b_1^2+\dots+b_n^2}$$

$$\boxed{|a\cdot b| \le |a|\cdot|b|}$$

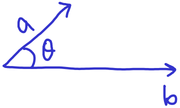


$$a\cdot b \overset{\text{op.}}{=} a_1b_1+\dots+a_nb_n$$

$$\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2} = |a|$$

$|OA| =$

$= \sqrt{x^2+y^2+z^2}$



$$a\cdot b = |a|\cdot|b|\cos\theta$$

$$\Downarrow$$

$$|a\cdot b| \le |a|\cdot|b|$$

$|\cdot| \le 1$

$$|OA|^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 = x^2+y^2+z^2$$

Απόδειξη: $t\in\mathbb{R}$ $\quad \varphi(t) = (a_1-tb_1)^2+\dots+(a_n-tb_n)^2 \ge 0$

$$\varphi(t) = (a_1^2+b_1^2t^2-2a_1b_1t)+\dots+(a_n^2+b_n^2t^2-2a_nb_nt) = At^2+Bt+C$$

$$= t^2(b_1^2+\dots+b_n^2) - 2(a_1b_1+\dots+a_nb_n)t + (a_1^2+\dots+a_n^2) \Rightarrow 0 \ge \Delta = \cancel{4}|a\cdot b|^2 - \cancel{4}|b|^2|a^2|$$

Cauchy - Schwarz για ολοκλ. $\quad a(x), b(x) : [c,d] \to \mathbb{R}$

$$\to a\cdot b = \int_c^d a(x)\cdot b(x)\,dx \qquad |a|^2 = \int_c^d a(x)^2 dx \qquad |b|^2 = \int_c^d b(x)^2 dx$$

$$\boxed{|a\cdot b| \leq |a|\cdot|b|} : \quad \left|\int_c^d a(x)\,b(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_c^d a^2(x)\,dx}\ \sqrt{\int_c^d b^2(x)\,dx}$$

$$0 \leq \varphi(t) = \int_c^d \big(a(x) - t\,b(x)\big)^2 dx = \int_c^d a^2(x) + b^2(x)\,t^2 - 2a(x)\,b(x)\,t\ dx$$

$$= \int_c^d a^2(x)\,dx + t^2\int_c^d b^2(x)\,dx - 2t\int_c^d a(x)\,b(x)\,dx = |b|^2 t^2 - 2a\cdot b\,t + |a|^2$$

$$0 \geq \frac{\Delta}{4} = |a\cdot b|^2 - |a|^2\cdot|b|^2$$

$$\cos\theta = \frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|} \qquad \theta = \arccos\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}$$

$\mathbb{R}^4$

$$a = (1, 2, 3, 0)$$
$$b = (-1, 4, 5, -7)$$

Ποια η γωνία τους;

$$a \cdot b = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 0 \cdot 7 = 22$$

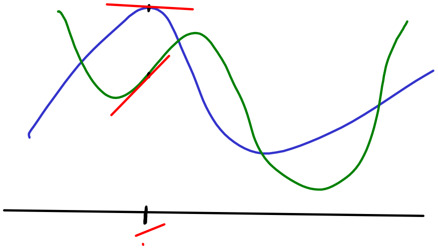
$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\theta = \sqrt{14 \cdot 91}\, \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{22}{\sqrt{14 \cdot 91}} \in [-1, 1]$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{22}{\sqrt{14 \cdot 91}}\right)$$

$$|a| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{14}$$

$$|b| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 5^2 + (-7)^2} = \sqrt{91}$$



Ποιο είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f(x) = (3x+5)\cos(x/4)$$

που στο 0 κάνει 1;

$$\int (3x+5)\cos\frac{x}{4}\,dx = 3\int x\cos\frac{x}{4}\,dx + 5\int \cos\frac{x}{4}\,dx$$

$$= 3\boxed{\int x\cos\frac{x}{4}\,dx} + 20\sin\frac{x}{4}$$

$$\int x\cos\frac{x}{4}\,dx = \int x\left(4\sin\frac{x}{4}\right)'dx$$

$$= 4x\sin\frac{x}{4} - 4\int \sin\frac{x}{4}\,dx$$

$$= \boxed{4x\sin\frac{x}{4} + 16\cos\frac{x}{4}}$$

$$\int x e^x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' e^x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x\,dx$$

$$\int x(e^x)'\,dx = xe^x - \int e^x\,dx$$

$$= xe^x - e^x + C$$

$$\int e^{-x^2}\,dx \qquad F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

$$F'(x) = e^{-x^2}$$

Δεν υπάρχει τύπος για την $F(x)$.

$+, -, \times, /, \cos, \sin, e^x, \log, \arccos$

$$\lim_{x\to 0+} \ln\left((\cos 2x)^{1/x^2}\right) = \lim_{x\to 0+} \cancel{\frac{\ln(2x)}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\tan 2x}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{-2}{\cos^2(2x)} = -2$$

(εφαρμόσαμε L' Hopital δύο φορές, στη 2η και την ~~3η ισότητα~~) άρα

$$\lim_{x\to 0+} (\cos 2x)^{1/x^2} = e^{-2}.$$

$$(\ln \varphi(x))' = \frac{1}{\varphi(x)} \varphi'(x)$$

$0/0$

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{(\cos 2x)^{1/x^2}}_{f(x)}$$

$$\ln f(x) = \frac{1}{x^2} \ln \cos 2x = \frac{\ln \cos 2x}{x^2}$$

$$\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x \cdot 2x} = -\frac{\tan 2x \to 0}{x \to 0} \qquad \frac{\frac{-2}{\cos^2 2x}}{1} \to -2$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln f(x) = a$$

e^x συνεχής

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{[\ln f(x)]} = e^{\lim_{x\to 0^+} \ln f(x)}$$

$$e^{-2}$$

3. Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $|f'| \le M$ παντού δείξτε ότι δύο αθροίσματα Riemann που αντιστοιχούν στην ίδια διαμέριση του $[a,b]$ διαφέρουν το πολύ κατά $M(b-a)\Delta$, όπου Δ είναι το πλάτος της διαμέρισης (το μήκος του μεγαλύτερου από τα διαστηματάκια της διαμέρισης).

Λύση: Ας είναι
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$
τα σημεία της διαμέρισης τα δύο αθροίσματα Riemann για τα οποία μιλάμε ας προκύπτουν με υπολογισμό της f στα σημεία $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ και $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ αντίστοιχα ($i = 1, 2, \ldots, n$). Τα δύο αθροίσματα Riemann είναι δηλ. οι αριθμοί
$$S_1 = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$
και
$$S_1 = f(\zeta_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\zeta_n)(x_n - x_{n-1}).$$
Άρα
$$\begin{aligned} |S_1 - S_2| &= |(f(\xi_1) - f(\zeta_1))(x_1 - x_0) + \cdots + (f(\xi_n) - f(\zeta_n))(x_n - x_{n-1})| \\ &\le |(f(\xi_1) - f(\zeta_1))(x_1 - x_0)| + \cdots + |(f(\xi_n) - f(\zeta_n))(x_n - x_{n-1})| \qquad (2) \end{aligned}$$
Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει σημείο τ_i ανάμεσα στα ξ_i και ζ_i τ.ώ. να ισχύει
$$f(\xi_i) - f(\zeta_i) = \pm f'(\tau_i)(\xi_i - \zeta_i)$$
(το $\pm$ επειδή δεν ξέρουμε ποιο από τα δύο σημεία ξ_i, ζ_i είναι μικρότερο από το άλλο). Άρα έχουμε την ανισότητα
$$|f(\xi_i) - f(\zeta_i)| \le M\underline{(x_i - x_{i-1})}. \le M \cdot \Delta \qquad x_i - x_{i-1} \le \Delta$$
Άρα
$$|(f(\xi_i) - f(\zeta_i))(x_i - x_{i-1})| \le M\Delta(x_i - x_{i-1}).$$
Αθροίζοντας αυτές τις ανισότητες για $i = 1, 2, \ldots, n$, έχουμε ότι η ποσότητα (2) φράσσεται από το ζητούμενο.

Ποιο είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f(x) = \sin^5 x$$

που στο $\frac{\pi}{2}$ κάνει 0;

$$\int \sin^5 x\,dx = \int \sin x \cdot (\sin^2 x)^2 dx$$

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

$$= \int \sin x \,(1-\cos^2 x)^2\,dx$$

$$= \int \sin x\,(1+\cos^4 x - 2\cos^2 x)\,dx = \int \sin x\,dx + \int \sin x \cdot \cos^4 x\,dx - 2\int \sin x \cos^2 x\,dx$$

$$y = \cos x$$

$$dy = -\sin x\,dx$$

$$= -\cos x - \int y^4\,dy + 2\int y^2\,dy$$

$$= -\cos x - \frac{y^5}{5} + 2\frac{y^3}{3}$$

$$= -\cos x - \frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x + C$$

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx =$$

$$= \int \underbrace{\sin x}\cdot(1-\cos^2 x)\cos^2 x\,\underbrace{dx}$$

Ποιο είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{1+\sin x}$$

που μηδενίζεται στο 0.

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \underbrace{\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}}_{} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dy}{y^2}$$

$$y = \cos x$$

$$dy = -\sin x\,dx$$

$$= \tan x - \frac{1}{y} = \tan x - \frac{1}{\cos x} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \boxed{\ln x} \qquad x > 0$$

$\ln|x|$ $\rightarrow$ καλύτερο

Η μέθοδος της ολοκλήρωσης κατά μέρη ή κατά παράγοντες

$\int \underbrace{f g' + f' g}_{(fg)'} = f\cdot g$

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

$f(x) = x + \boxed{C}$

$f(x) = \underline{\underline{x}} + \cancel{\boxed{\frac{C}{2}}}$

$C \ldots$

1. $\int \ln x\,dx = \int 1\cdot \ln x\,dx = \int x'\ln x\,dx = x\cdot\ln x - \int x\cdot(\ln x)'\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx$
   $= x\ln x - x + C$

2. $\int xe^x\,dx = \int x(e^x)'\,dx = x\cdot e^x - \int x'e^x\,dx = x e^x - \int e^x\,dx = x\cdot e^x - e^x + C$

3. $\int x\sin x\,dx = \int x(-\cos x)'\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$

   $(-x\cos x + \sin x)' = -\cancel{\cos x} + x\sin x + \cancel{\cos x} = x\sin x$ (επαλήθευση)

4. $\int \underline{e^x \sin x\,dx} = \int (e^x)'\sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \int (e^x)'\cos x\,dx$
   $= e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx$

   $\int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x\sin x - \frac{1}{2}e^x\cos x + C/2$ → οποιοσδήποτε αριθμός

C

$f(x)$

$\ln f(x) = x + C \rightarrow \in \mathbb{R}$

$f(x) = e^{x+C} = \boxed{e^C}\,e^x = \underline{\underline{\overset{>0}{C}}}\,e^x$

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$y = \sin x \qquad x = \arcsin y$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$y = \sin x$

$y^2 = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\cos^2 x = 1 - y^2$

$\cos x = \sqrt{1-y^2}$

$$\int \sin^4 x \, dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - \cos 2x\right)^2 dx$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \int 1 + \boxed{\cos^2 2x} - 2\cos 2x \, dx$$

$$\boxed{\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$= 2\cos^2 x - 1 \Longrightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx = \int \frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8}$$

Αν μια συνάρτηση f έχει αρκετές παραγώγους είδαμε ότι μπορούμε να περιμένουμε ότι θα την προσεγγίσουμε αρκετά καλά σε ένα διάστημα με το πολυώνυμο Taylor.

Αν επιχειρήσει κανείς να προσεγγίσει μια συνάρτηση σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ με ένα πολυώνυμο τότε υπάρχουν αρκετά προβλήματα.

Ένα παράδειγμα είναι η συνάρτηση e^x που είναι μάλιστα άπειρες φορές παραγωγίσιμη. Για αυτή τη συνάρτηση ισχύει το εξής:

> Δεν υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε $|e^x - p(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Όχι μόνο δε μπορούμε δηλ. να την προσεγγίσουμε όσο καλά θέλουμε με ένα πολυώνυμο σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, δε μπορούμε καν να είμαστε (με ένα πολυώνυμο) το πολύ μια μονάδα μακριά από την e^x.

Επιλέξτε όσα από τα παρακάτω θεωρείτε ότι είναι λόγοι που συμβαίνει αυτό.

Select one or more:

- [ ] 1. Η συνάρτηση e^x αυξάνει τόσο γρήγορα όταν $x \to +\infty$ που κανένα πολυώνυμο δε μπορεί να την ακολουθήσει για όλα τα x. ✓
- [ ] 2. ~~Η συνάρτηση e^x είναι πάντα θετική, όμως κάθε πολυώνυμο πρέπει να έχει ρίζα.~~ $1+x^2$
- [ ] 3. Δε μπορεί ένα πολυώνυμο που τείνει στο $+\infty$ για $x \to +\infty$ να είναι φραγμένο στο $(-\infty, 0)$, όπως κάνει η συνάρτηση e^x. ✓

$$|e^x - p(x)| \leq 100, \quad \forall x$$

$$\frac{e^x}{p(x)} \to +\infty \qquad x \to +\infty$$

$$\boxed{\frac{p(x)}{e^x}} \to 0$$

$$\left|1 - \boxed{\frac{p(x)}{e^x}}\right| \leq \boxed{\frac{100}{e^x}}$$

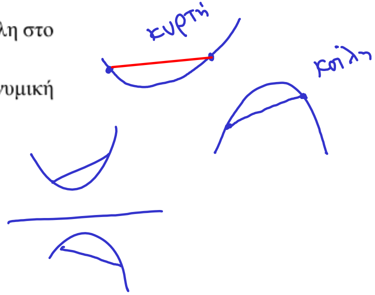
$\to 0$ $\to 0$ $\to 1$

$p_n x^n + \dots + p_1 x + \boxed{p_0}$

$a > 1 \qquad \frac{n^k}{a^n} \to 0$

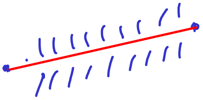
6.9.16. (i) Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα αν και μόνο αν η $-f$ είναι κοίλη στο ίδιο διάστημα.

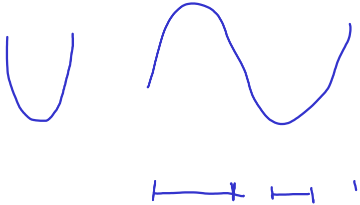
(ii) Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή και κοίλη σε κάποιο διάστημα αν και μόνο αν είναι πολυωνυμική βαθμού ≤ 1 ή μηδενική.



$\rightarrow f(x) = ax + b$

f κυρτή, κοίλη $\Rightarrow f = ax+b$





4. Δείξτε ότι υπάρχει Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt = e^x - 1$ αλλά δεν υπάρχει Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $\int_0^x g(t)\,dt = e^x$.

$$f(t) = e^t$$

$$\int_0^x g(t)\,dt = e^x$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = e^x - 1$$

$$f(x) = e^x$$

$$\boxed{\int_0^x \underbrace{\big(g(t) - f(t)\big)}_{\varphi(t)}\,dt = 1, \ \forall x}$$

$$\int_0^x e^t\,dt = e^t\Big|_0^x = e^x - e^0 = e^x - 1$$

$$\underbrace{\int_0^x \varphi(t)\,dt = 1}$$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\int_0^x \varphi(t)\,dt}_{1} = \int_0^0 \varphi(t)\,dt = 0$$

$e^x - e$ $\quad$ $E^x - E$

$-e + e^x$ $\quad$ $-E + E^x$