Λύσεις των ασκήσεων

---

1. Αν $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού k δείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor βαθμού k της f γύρω από οποιοδήποτε σημείο a είναι ίσο με την f.

Λύση: Κάθε πολυώνυμο του x μπορεί να γραφεί ως πολυώνυμο του $(x-a)$, στη μορφή δηλ.

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_k(x-a)^k, \tag{1}$$

και μάλιστα χωρίς να αλλάξει ο βαθμός του πολυωνύμου. Εύκολα βλέπουμε επίσης με επαγωγή ως προς το $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, ότι

$$f^{(i)}(a) = i! c_i$$

αφου κάθε φορά που παραγωγίζουμε κατεβαίνει κάτω ο εκθέτης του κάθε μονωνύμου ως παράγοντας. Άρα

$$c_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}, \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

πράγμα που μας λέει ότι αν πάρουμε τα r πρώτα μονώνυμα της (1) θα βρούμε το πολυώνυμο Taylor της f γύρω από το a βαθμού r.

Ειδικότερα τώρα για $r = k$ αυτό μας δίνει το ζητούμενο.

---

2. Αν $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ βρείτε μια συνάρτηση $f(x)$ που να είναι n φορές παραγωγίσιμη στο 0 και τ.ώ.

$$f^{(i)}(0) = c_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Λύση: Πάρτε

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \frac{c_2}{2}x^2 + \frac{c_3}{3!}x^3 + \cdots + \frac{c_n}{n!}x^n.$$

Για $i = 0$ είναι φανερό ότι $f^{(0)}(0) = f(0) = c_0$ ως είχαμε να δείξουμε. Για $i > 0$ το δείχνουμε απλά παραγωγίζοντας i φορές και θέτοντας $x = 0$ ώστε να επιζήσει μόνο ο σταθερός όρους της i-οστής παραγώγου, όπως και στο πρόβλημα 1.

---

3. Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $|f'| \le M$ παντού δείξτε ότι δύο αθροίσματα Riemann που αντιστοιχούν στην ίδια διαμέριση του $[a, b]$ διαφέρουν το πολύ κατά $M(b-a)\Delta$, όπου Δ είναι το πλάτος της διαμέρισης (το μήκος του μεγαλύτερου από τα διαστηματάκια της διαμέρισης).

Λύση: Ας είναι

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

τα σημεία της διαμέρισης τα δύο αθροίσματα Riemann για τα οποία μιλάμε ας προκύπτουν με υπολογισμό της f στα σημεία $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ και $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ αντίστοιχα $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Τα δύο αθροίσματα Riemann είναι δηλ. οι αριθμοί

$$S_1 = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

και

$$S_1 = f(\zeta_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\zeta_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Άρα

$$\begin{aligned} |S_1 - S_2| &= |(f(\xi_1) - f(\zeta_1))(x_1 - x_0) + \cdots + (f(\xi_n) - f(\zeta_n))(x_n - x_{n-1})| \\ &\le |(f(\xi_1) - f(\zeta_1))(x_1 - x_0)| + \cdots + |(f(\xi_n) - f(\zeta_n))(x_n - x_{n-1})| \end{aligned} \tag{2}$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει σημείο τ_i ανάμεσα στα ξ_i και ζ_i τ.ώ. να ισχύει

$$f(\xi_i) - f(\zeta_i) = \pm f'(\tau_i)(\xi_i - \zeta_i)$$

(το $\pm$ επειδή δεν ξέρουμε ποιο από τα δύο σημεία ξ_i, ζ_i είναι μικρότερο από το άλλο). Άρα έχουμε την ανισότητα

$$|f(\xi_i) - f(\zeta_i)| \le M(x_i - x_{i-1}).$$

Άρα

$$|(f(\xi_i) - f(\zeta_i))(x_i - x_{i-1})| \le M\Delta(x_i - x_{i-1}).$$

Αθροίζοντας αυτές τις ανισότητες για $i = 1, 2, \ldots, n$, έχουμε ότι η ποσότητα (2) φράσσεται από το ζητούμενο.

---

4. (a) Λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα Lipschitz με σταθερά Lipschitz το θετικό αριθμό M αν για κάθε x, y στο πεδίο ορισμού της f ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y|.$$

Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο φραγμένη από M είναι και Lipschitz με σταθερά Lipschitz αυτό το M.

(b) Δείξτε ότι η συνάρτηση x^2 δεν είναι Lipschitz αν θεωρήσουμε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ ως πεδίο ορισμού της αλλά είναι Lipschitz αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της να είναι ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$.

(c) Δείξτε ότι δε χρειάζεται μια συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη για να είναι Lipschitz.

Λύση: (a) Εφαρμόζουμε απλά το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

(b) Αν γράψουμε $f(x) = x^2$ τότε $f(n + 1) - f(n) = 2n + 1$ που δεν είναι φραγμένη ποσότητα όταν $n \in \mathbb{Z}$. Αν η συνάρτηση ήταν Lipschitz αυτή η ποσότητα θα ήταν φραγμένη.

(c) Πάρτε τη συνάρτηση (σε όλο το $\mathbb{R}$) $f(x) = |x|$. Αυτή δεν είναι παραγωγίσιμη παντού αλλά είναι Lipschitz με σταθερά 1:

$$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \le |x - y| \quad \text{από την τριγωνική ανισότητα.}$$

---

5. Η συνάρτηση $f : [1, N] \to [0, +\infty)$ είναι φθίνουσα (N είναι φυσικός αριθμός). Ας είναι S το εμβαδό κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$ πάνω από το διάστημα $[1, N]$. Με άλλα λόγια $S = \int_1^N f(x)\, dx$.

(a) Δείξτε ότι το άθροισμα

$$U = f(1) + f(2) + \cdots + f(N - 1)$$

όπως και το άθροισμα

$$L = f(2) + f(3) + \cdots + f(N)$$

είναι και τα δύο Riemann αθροίσματα για τη συνάρτηση $f(x)$ που αντιστοιχούν μάλιστα στην ίδια διαμέριση.

(b) Δείξτε

$$L \le S \le U.$$

(c) Δείξτε επίσης ότι

$$0 \le U - L \le f(1).$$

Λύση: (a) Πάρτε τη διαμέριση του $[1, N]$ σε $N - 1$ ίσα διαστήματα, δηλαδή τη διαμέριση που ορίζεται από τα σημεία $1, 2, 3, \ldots, N$. Τότε το άθροισμα U είναι Riemann άθροισμα της f για αυτή τη διαμέριση με σημεία υπολογισμού της f το αριστερό άκρο του κάθε ενός διαστήματος της μορφής $[i, i + 1]$ ενώ το άθροισμα L αντιστοιχεί στα σημεία υπολογισμού της f να είναι τα δεξιά άκρα των ίδιων διαστημάτων.

(b) Το εμβαδό S_i κάτω από την $y = f(x)$ που βρίσκεται πάνω από το διάστημα $[i, i + 1]$ ικανοποιεί, λόγω του ότι η f είναι φθίνουσα, την ανισότητα

$$f(i) \ge S_i \ge f(i + 1).$$

Αθροίζοντάς τις αυτές για $i = 1, 2, \ldots, N - 1$ παίρνουμε τη ζητούμενη ανισότητα.

(c) Έχουμε

$$U - L = f(1) - f(N) \le f(1).$$