Απειροστικός Λογισμός Ι - Φθινόπωρο 2020-21- Φυλλάδιο Ασκήσεων $\boxed{9}$ - Μιχάλης Κολουντζάκης

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς. Αν έχετε πρόβλημα να λύσετε κάποια άσκηση ζητήστε βοήθεια στο Forum του μαθήματος. Οι λύσεις θα δημοσιεύονται 1-2 βδομάδες μετά από την ανάρτηση του κάθε Φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Ορίζουμε τις ακολουθίες

$$a_n = \int_1^n \frac{dx}{x^2}, \quad b_n = \int_1^n \frac{dx}{x}, \quad c_n = \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x^2},$$
$$d_n = \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x}, \quad e_n = \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x^{1/2}}.$$

Όλες οι αυτές ακολουθίες είναι θετικές και μονότονες. Ποιες από αυτές συγκλίνουν σε πραγματικό αριθμό και ποιες στο $+\infty$; (Ισοδύναμα, ποιες είναι φραγμένες και ποιες όχι;)

2. Ορίζουμε τις ακολουθίες

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad b_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Δείξτε ότι $a_n \to +\infty$ ενώ η b_n είναι φραγμένη, και άρα συγκλίνουσα σε πραγματικό αριθμό (προφανώς και οι δύο ακολουθίες είναι αύξουσες).

3. Ας είναι f μια φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού αποδείξτε τις εξής παραλλαγές του (εδώ $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της f).

(a) Αν το όριο $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ υπάρχει τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο a και $F'(a) = L$.

(b) Αν τα πλευρικά μόνο όρια της f υπάρχουν στο a και είναι

$$\lim_{x\to a-} f(x) = L, \quad \lim_{x\to a+} f(x) = R$$

τότε υπάρχουν και οι πλευρικές παράγωγοι της F στο a και μάλιστα

$$\lim_{h\to 0-} \frac{1}{h}(F(a+h) - F(a)) = L, \quad \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(F(a+h) - F(a)) = R.$$

4. Δείξτε ότι υπάρχει Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt = e^x - 1$ αλλά δεν υπάρχει Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $\int_0^x g(t)\,dt = e^x$.

5. Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής παντού και η $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη παντού υπολογίστε την παράγωγο της συνάρτησης

$$A(x) = \int_0^{\phi(x)} f(t)\,dt.$$