2. Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^n \quad \frac{1}{3}$$

$$a_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^4, \quad b_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + 2^{n+1}}, \quad c_n = \frac{1}{\frac{1}{n} + 2^{-n}}, \quad d_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

$$\frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + 2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{3} + \underbrace{\frac{(-2)^n}{3^{n+1}}}_{\to 0}}{\underbrace{1 + \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}_{\to 0}}_{\to 1}} \to 1/3$$

3. Υποθέστε ότι $f(x) \neq 1$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f και ας είναι $z \in \mathbb{R}$ ένα σημείο που προσεγγίζεται από τα σημεία του πεδίου ορισμού της f. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \to z} f(x) = 2 \iff \lim_{x \to z} \frac{f(x)+3}{f(x)-1} = 5.$$

Λύση: Η κατεύθυνση $\Longrightarrow$ είναι άμεση συνέπεια των αλγεβρικών ιδιοτήτων του ορίου.

Για την ανάποδη κατεύθυνση, ονομάζουμε

$$g(x) = \frac{f(x)+3}{f(x)-1}$$

$(f-1)g = f+3 \Rightarrow fg - g = f+3$

$\Rightarrow f(g-1) = g+3$

και παρατηρούμε ότι πάντα $g(x) \neq 1$. Λύνουμε τώρα αυτή τη σχέση ως προς $f(x)$ και προκύπτει ότι

$$f(x) = \frac{g(x)+3}{g(x)-1}.$$

$f = \frac{g+3}{g-1}$

Υποθέτοντας ότι $\lim_{x \to z} g(x) = 5$ και εφαρμόζοντας τις αλγεβρικές ιδιότητες του ορίου και πάλι παίρνουμε ότι $\lim_{x \to z} f(x) = 2$.

4. Υπολογίστε τα όρια

$$(a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\lfloor 2x\rfloor}{x},\quad (b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\lfloor \sqrt{x}\rfloor}{x},\quad (c)\ \lim_{x\to 0+}\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor.$$

$$x \to +\infty \qquad \frac{\lfloor 2x\rfloor}{x}$$

$$\lfloor 2x\rfloor \le 2x$$

$$\lfloor 2x\rfloor \ge 2x-1$$

Λύση:

(a) Περιοριζόμαστε σε $x>0$. Ισχύει $2x-1\le\lfloor 2x\rfloor\le 2x$ άρα

$$\frac{2x-1}{x}\le\frac{\lfloor 2x\rfloor}{x}\le\frac{2x}{x}=2$$

και, παρατηρώντας ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x}=2$ παίρνουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{\lfloor 2x\rfloor}{x}=2$.

(b) Περιοριζόμαστε σε $x>0$. Ισχύει $0\le\lfloor\sqrt{x}\rfloor\le\sqrt{x}$ άρα

$$0\le\frac{\lfloor\sqrt{x}\rfloor}{x}\le\frac{1}{\sqrt{x}}\to 0,$$

άρα το όριο είναι 0.

(c) Για $x>0$ έχουμε $\lfloor\frac{1}{x}\rfloor\ge\frac{1}{x}-1\to+\infty$ άρα το όριο είναι $+\infty$.

$$\overset{\substack{2\\ \uparrow}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{2x-1}{x} \le \underbrace{\frac{\lfloor 2x\rfloor}{x}}_{\substack{\downarrow\\ 2}} \le \frac{2x}{2} = \overset{\substack{2\\ \uparrow}}{2}$$

$$\forall z\in\mathbb{R}:\ \lfloor z\rfloor \le \boxed{z \le \lfloor z\rfloor + 1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\lfloor z\rfloor \ge z-1}$$

$$0 \le \frac{\lfloor\sqrt{x}\rfloor}{x} \le \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$$

$$x\to 0^+$$

$$\underbrace{\frac{1}{x}-1}_{\to\infty} \le \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \to +\infty$$

5. (a) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$ δείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ τ.ώ. αν $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ και $x \neq a$ τότε $f(x) < g(x)$.

(b) Αν υποθέσουμε απλά ότι $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$ δείξτε ότι δε μπορούμε από αυτό να συμπεράνουμε ότι $f(x) \le g(x)$ σε κάποιο διάστημα γύρω από το a.

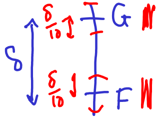
Λύση: (a) Έστω $F = \lim_{x\to a} f(x)$ και $G = \lim_{x\to a} g(x)$. Ορίζουμε $\delta = G - F > 0$.

Αφού $f(x) \to F$ για $x \to a$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ τ.ώ.

$$0 < |x-a| < \delta_1 \implies |f(x) - F| < \delta/10.$$

Επίσης, αφού $g(x) \to G$ υπάρχει $\delta_2 > 0$ τ.ώ.

$$0 < |x-a| < \delta_2 \implies |g(x) - G| < \delta/10.$$



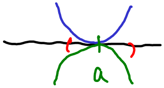
Παίρνουμε $\boxed{\epsilon = \min\{\delta_1, \delta_2\}.}$ Αν $0 < |x-a| < \epsilon$ ισχύει η υπόθεση σε κάθε μια από τις δύο παραπάνω συνεπαγωγές και άρα ισχύει

$$|f(x) - F| < \delta/10, \quad |g(x) - G| < \delta/10.$$

Από αυτές τις δύο ανισότητες έπεται ότι $f(x) < g(x)$.

(b) Αρκεί να δώσουμε ένα παράδειγμα όπου η ισχύει η υπόθεση

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$



χωρίς να ισχύει η ανισότητα $f(x) \le g(x)$ σε κανένα διάστημα γύρω από το a. Πάρτε π.χ. $f(x) = (x-a)^2$ και $g(x) = -(x-a)^2$.

$\lim_{x\to a} f(x)$

$f(a)$

$\lim_{x\to a} \varphi(x) > 0 \implies$

υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω.

$\left.\begin{matrix} x \in (a-\delta, a+\delta) \\ x \neq a \end{matrix}\right\} \implies$

$\varphi(x) > 0$

$\varphi(x) = g(x) - f(x)$

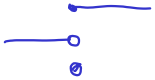
$\lim_{x\to a} \varphi(x) = L > 0 \qquad \varepsilon = \frac{L}{2} \qquad \exists \delta$ τ.ω.

$\left.\begin{matrix} x \in (a-\delta, a+\delta) \\ x \neq a \end{matrix}\right\} \implies |\varphi(x) - L| < \frac{L}{2}$

$\implies \varphi(x) > L/2 > 0$

f συνεχής στο c
g συνεχής στο $f(c)$ $\Big\} \Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x))$ συνεχής στο c

$g(x) = 1$

$f(x) =$ 

$g(f(x)) = 1$ συν.

Αν $a_n \to 1$ και $b_n \to 2$ ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αναγκαστικά σωστές; Θα πρέπει να τις επιλέξετε όλες και μόνο αυτές για να θεωρηθεί σωστή η άσκηση.

Select one or more:

1. Τελικά $b_n - a_n \geq 1$
2. Τελικά $a_n^2 < b_n^2$.
3. Τελικά $a_n \leq \frac{b_n}{2}$.

$\boxed{a_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad b_n = 2 - \frac{1}{n}}$

$b_n - a_n = 1 - \frac{2}{n} \ngeq 1$

1 4

$\frac{b_n}{2} = 1 - \frac{1}{2n} \ngeq 1 + \frac{1}{n}$

1 4

1 1

Ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες τείνουν στο $+\infty$; Πρέπει να τις επιλέξετε όλες και μόνο αυτές για να θεωρηθεί σωστή η ερώτηση.

Select one or more:

✗ 1. $\underline{(2+(-1)^n)}^n$

$1^1 \quad 3^2 \quad 1^3 \quad 3^4 \quad 1^5 \quad 3^6$

$3, 1$

✗ 2. $\dfrac{2^n+5^n}{4^n+5^n} = \dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1} \to 1$

✓ 3. $\sqrt{2^{\sqrt{n}}}$

$2^{\sqrt{n}} \to \infty$

$$x_n \to +\infty \Rightarrow \sqrt{x_n} \to +\infty$$

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

Θα πρέπει να τις επιλέξετε όλες και μόνο αυτές για να θεωρηθεί σωστή η άσκηση.

$L \in \mathbb{R}$, $L = \pm\infty$

$a_n = \frac{1}{n} \to 0 = L$

Select one or more:

- [x] 1. Αν $0 \neq a_n \to L \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε η ακολουθία $b_n = \dfrac{n^{1/n}}{a_n^3}$ είναι φραγμένη. ($n^{1/n} \to 1$)
- [x] 2. Αν $a_n \to L \in \mathbb{R}$ τότε η ακολουθία $b_n = a_{n^2} + (-1)^n a_{n^3}$ είναι φραγμένη. ($a_{n^2} \to L$, $a_{n^3} \to L$)
- [x] 3. Αν $0 \neq a_n \to L \in \mathbb{R}$, τότε η ακολουθία $b_n = \dfrac{1}{a_n^2} + 2^{1/n}$ είναι φραγμένη. ($2^{1/n} \to 1$)

$a_{n^2} \to L$

υπακ. της a_n

$a_{n^3} \to L$

$a_n = \frac{1}{n}$

Ποιο είναι το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \frac{3^n + n^4}{n + 5 \cdot 3^{n-1}}; \quad = \frac{3 + \frac{n^4}{3^{n-1}}}{\frac{n}{3^{n-1}} + 5} \to \frac{3}{5}$$

$\frac{n^4}{3^{n-1}} \to 0$, $\frac{n}{3^{n-1}} \to 0$

$$\lim_n \frac{n^k}{a^n} = 0$$

$|a| > 1$

Η απάντηση είναι αριθμός και απαιτείται ακρίβεια τουλάχιστον 2 δεκαδικών ψηφίων.

Η ακολουθία a_n, με $n = 1, 2, \ldots$, είναι η

$$0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, 0. \frac{1}{6}\ 0$$

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

Πρέπει να τις επιλέξετε όλες και μόνο αυτές για να θεωρηθεί σωστή η άσκηση.

Select one or more:

1. Η ακολουθία $0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{1}{8}, 0, 0, \frac{1}{16}, \ldots$ είναι υπακολουθία της a_n.
2. Η ακολουθία $\frac{1}{n(n+1)}$, με $n = 1, 2, \ldots$, είναι υπακολουθία της a_n.
3. Η ακολουθία $0, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, \frac{1}{6}, 0, 0, 0, \frac{1}{8}, 0, 0, 0, \frac{1}{10}, \ldots$, είναι υπακολουθία της a_n.

Ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες είναι φραγμένες; Θα πρέπει να τις επιλέξετε όλες και μόνο αυτές για να θεωρηθεί σωστή η άσκηση.

Select one or more:

✓ 1. $(1/n)^{1/n} \to 1$

2. $\frac{1}{\sin\frac{1}{n}} \to +\infty$

✓ 3. $2^{1/n} \to 1$

$1/n^{1/n} \to 1$

$\sin x \leq x$

$n \to \infty$

$\frac{1}{n} \to 0$

$\underbrace{\sin\frac{1}{n}}_{\to 0} \leq \frac{1}{n} \to 0$