$f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής

$\cancel{\dfrac{f(x)}{1+x^2}}$ $\qquad f\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$

$$\frac{1}{1+x^2} \in (0,1]$$

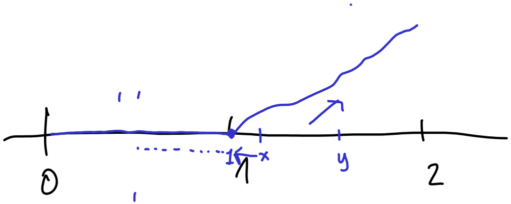
f φραγ. στο $(0,1]$

γιατί είναι φρ. στο $[0,1]$

Σωστό ή λάθος;

Η συνάρτηση $f:(0,2)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό. Η f' είναι ίση με 0 στο $(0,1]$ και είναι >0 στο διάστημα $(1,2)$.

Τότε η f είναι αύξουσα στο $(0,2)$.



$$f(1) \leftarrow f(x) \leq f(y)$$

$$f(1) \leq f(y)$$

$$\lim_{x\to 1^-} \overbrace{f(x)}^{c} = \overset{c}{f(1)}$$

$$x \leq y \Rightarrow$$

$$f(x) \leq f(y)$$

Σωστό ή λάθος;

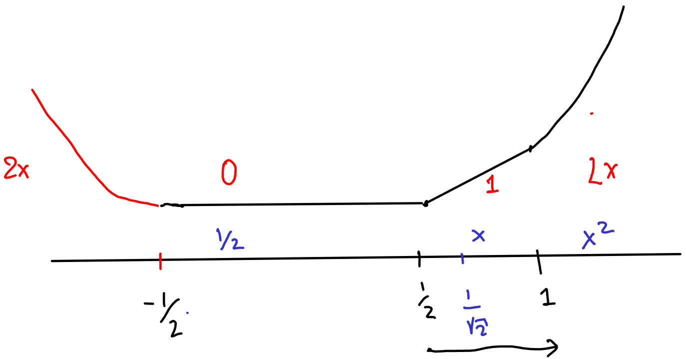
Η συνάρτηση $f(x)=\max\left\{\frac{1}{2}, x, x^2\right\}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

$x < \frac{1}{2}$

$\max\left\{\frac{1}{2}, x^2\right\}$

$\frac{1}{2} \leq x^2$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x$

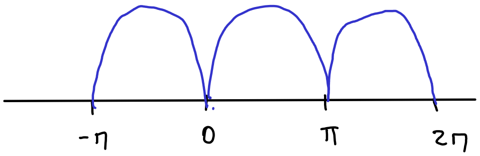


$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x \leq -1/\sqrt{2} \\ 1/2, & -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1/2 \\ x, & 1/2 \leq x \leq 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

$f' \uparrow$

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές για τη συνάρτηση $|\sin x|$;

- ☐ 1. Είναι κοίλη στο διάστημα $[0, \pi]$
- ☐ 2. Είναι κοίλη στο διάστημα $[0, \pi/2]$
- ☐ 3. Είναι κοίλη στο $[0, 2\pi]$
- ☐ 4. Έχει περίοδο 2π



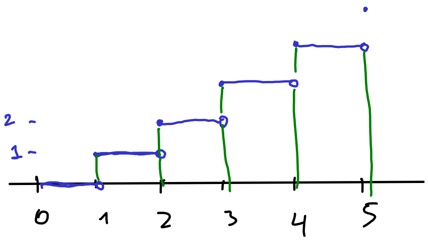
$$\forall x: \quad f(x+a) = f(x)$$

$$f(x+\underline{2a}) = f(x+a) = f(x)$$

$$\forall x: \quad f(x+2a) = f(x)$$

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^5 \lfloor x \rfloor \, dx.$$



10

Εφαρμόστε τον κανόνα του L' Hopital για να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x} = \quad\boxed{}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \quad\boxed{}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \quad\boxed{}$$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{(\cos 2x)^{1/x^2}}_{f(x)} = \quad\boxed{}$$

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$$

$$\underline{\underline{\ln}} = \log_e$$

$$\ln f(x) \xrightarrow{x\to 0} -2$$

$$f(x) = e^{\ln f(x)} \longrightarrow e^{-2}$$

$$\ln f(x) = \frac{1}{x^2}\ln(\cos 2x) = \frac{\overbrace{\ln(\overbrace{\cos 2x}^{\to 1})}^{\to 0}}{\underbrace{x^2}_{\to 0}}$$

$$\lim_{x\to 0}\underline{\ln f(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x\cdot\cancel{2})}{\cancel{2}x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin 2x}{x\cos 2x} \longrightarrow -2$$

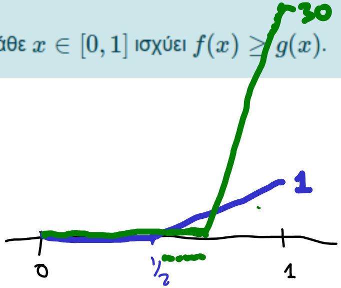
$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\overbrace{\cos 2x}^{\uparrow}}{\underbrace{\cos 2x}_{\swarrow 1}\ \overset{\shortparallel}{}\ -\underbrace{x\,2\sin 2x}_{\downarrow 0}}$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και ότι

$$\int_0^1 f(x)\,dx > \int_0^1 g(x)\,dx.$$

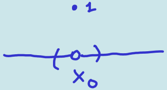
Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αναγκαστικά σωστές υπό αυτές τις υποθέσεις;

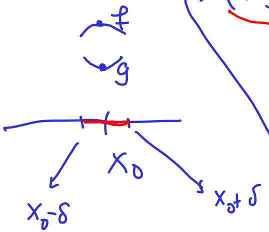
- ☐ 1. Υπάρχει ένα διάστημα $I \subseteq (0,1)$ τ.ώ. για κάθε $x \in I$ ισχύει $f(x) > g(x)$ ✓
- ☐ 2. Υπάρχει ένα $x_0 \in [0,1]$ τ.ώ. $f(x_0) > g(x_0)$. ✓
- ☐ 3. Για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $f(x) \geq g(x)$. λάθος



$\forall x \quad f(x) \leq g(x)$

$\int_0^1 f \leq \int_0^1 g$ άτοπο





$f - g$ συνεχής

$(f-g)(x_0) = f(x_0) - g(x_0) > 0$

$\varepsilon = \dfrac{f(x_0) - g(x_0)}{2}$

$\exists\, \delta > 0 : |x - x_0| < \delta$

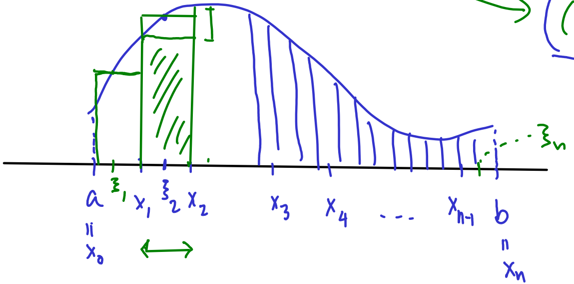
$|(f-g)(x) - (f-g)(x_0)| < \varepsilon$

$(f-g)(x) > \dfrac{f(x_0) - g(x_0)}{2} > 0$

$f(x) > g(x)$

άθροισμα Riemann

$$(x_1-x_0)f(\xi_1)+(x_2-x_1)f(\xi_2)+\dots+(x_n-x_{n-1})f(\xi_n)$$



$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\geq \qquad \geq \qquad \geq$$

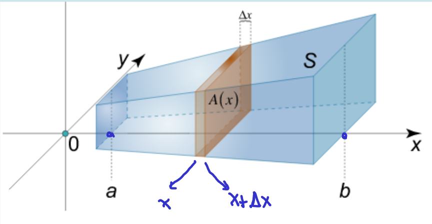
$$f(x)\le g(x),\ \forall x\in[a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$ (μονοτονία του ολοκληρ.)

$$(x_1-x_0)g(\xi_1)+(x_2-x_1)g(\xi_2)+\dots+(x_n-x_{n-1})g(\xi_n)$$

$$x_n \geq y_n$$

$$\lim x_n \geq \lim y_n$$

Το στερεό σώμα που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα έχει τεμνόμενο με το επίπεδο κάθετο στον άξονα των x στο σημείο x τομή ένα ορθογώνιο με πλευρά παράλληλη με τον άξονα των y ίση με $\frac{3}{2}(x-a)+2$ και πλευρά παράλληλη με τον (κατακόρυφο) άξονα των z ίση με $\frac{5}{2}(x-a)+1$.



Ο όγκος του στερεού αυτού δίδεται ως ένα ολοκλήρωμα του εμβαδού της τομής, για όλο το εύρος των x που είναι το [a, b].

Αν λοιπόν ο όγκος είναι

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

ποια είναι η συνάρτηση

$A(x) =$

$a \leq x \leq b$

$\frac{5}{2}(x-a)+1$

$\frac{3}{2}(x-a)+2$

όγκος φέτας $\cong \underline{\Delta x}\, \overbrace{\left(\frac{5}{2}(x-a)+1\right)\left(\frac{3}{2}(x-a)+1\right)}^{\varphi(x)}$

$a = x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1}, \quad b = x_n$

Δx

$(x_1-x_0)\varphi(\underset{\xi_1}{x_0}) + (x_2-x_1)\varphi(\underset{\xi_2}{x_1}) + \ldots + (x_n-x_{n-1})\varphi(\underset{\xi_n}{x_{n-1}})$

$\int_a^b \varphi(x)\,dx$

6.9.30. Βρείτε τις προσεγγίσεις Taylor οποιασδήποτε τάξης των συναρτήσεων $\frac{1}{1-x}$, e^x, $\log\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{x^2+1}$ με $\xi = 0$.

$f(x)$

6.9.31. Εφαρμόστε το θεώρημα του Taylor με σφάλμα τύπου Lagrange στην $\sqrt{x}$ στο διάστημα $[4, 4.00001]$ με $\xi = 4$ και $x = 4.00001$. Ποιό n πρέπει να χρησιμοποιήσετε ώστε να προσεγγίσετε το $\sqrt{4.00001}$ με ακρίβεια έως και χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου;

$f(x_0),\ f'(x_0),\ \frac{f''(x_0)}{2},\ \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} + \cdots$

$(1-x)^{-2}$

$f(x) = \frac{1}{1-x}$, $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $f''(x) = 2(1-x)^{-3}$, $f^{(3)}(x) = 2\cdot 3(1-x)^{-4}$, $f^{(4)}(x) = 2\cdot 3\cdot 4(1-x)^{-5}$

$$f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-n-1} \qquad f^{(n)}(0) = n!$$

$$\frac{1}{1-x} = \underbrace{1 + x + x^2 + \cdots + x^n}_{} + R_n(x)$$

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$\frac{1-(1-x^{n+1})}{1-x} = \boxed{\frac{x^{n+1}}{1-x} = R_n(x)}$$

$$f(x) = \log \frac{1}{1-x}, \qquad f'(x) = (1-x)\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}$$

$$\boxed{0! = 1}$$

$$f^{(n+1)}(x) = n!\,(1-x)^{-n-1}$$

$$f^{(n)}(x) = (n-1)!\,(1-x)^{-n}$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \log \frac{1}{1-x} & n = 0 \\ (n-1)!\,(1-x)^{-n} & n > 0 \end{cases}$$

$$\log \frac{1}{1-x} = \underbrace{0} + x + \underbrace{\frac{f^{(2)}(0)}{2!}}_{1/2} x^2 + \underbrace{\frac{f^{(3)}(0)}{3!}}_{1/3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots$$

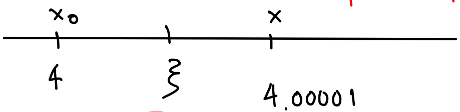
6.9.31. Εφαρμόστε το θεώρημα του Taylor με σφάλμα τύπου Lagrange στην $\sqrt{x}$ στο διάστημα $[4, 4.00001]$ με $\xi = 4$ και $x = 4.00001$. Ποιό n πρέπει να χρησιμοποιήσετε ώστε να προσεγγίσετε το $\sqrt{4.00001}$ με ακρίβεια έως και χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου;

$n = 2k$

$\frac{1}{2^5} \le 10$

$\sqrt{4.00001}$

2.



$$|f^{(n)}(x)| \le \frac{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2k+1)}{2^{3n}}$$

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}(x-4)^{n+1}$$

θέλω

$$= \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}10^{-5(n+1)} \le 10^{-1000}$$

$4 + 10^{-5}$

$x - 4$

$\frac{1}{2^3}\,3\,\frac{1}{2^5} = \frac{3}{2^8}$

άνω φράγμα

$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ $\quad \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$f''(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}x^{-3/2}$ $\quad \frac{1}{2^2\, 2^3}$

$f^{(3)}(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}x^{-5/2}$

$f^{(4)}(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}x^{-7/2}$ $\quad \frac{3\cdot 5}{2^{11}}$

$$\iff |f^{(n+1)}(\xi)| \le \underbrace{10^{5(n+1)-1000}}_{\text{καλό}} \cdot \underbrace{(n+1)!}_{\text{καλό}}$$

$\frac{3}{2^8} \le 10^{17}\cdot 24$

$$\left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \leq 10^{5(n+1)-1000} (n+1)!$$

$$5(n+1) \geq 1000$$

$$n+1 \geq 200$$

$$n \geq 199$$

$$\underline{\underline{n = 200}}$$

$$10^5 \cdot (201)!$$

$$\vee\!|$$

$$\left| f^{(201)}(\xi) \right| \leq \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 201}{2^{3n}}$$

$$\overbrace{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 201} \leq 2^{3n} \, 10^5 \underbrace{(201)!}$$

$$f(x) = e^x$$

$$f^{(4)}(x) = e^x$$

$\sqrt{3}$

$$\left| f^{(4)}(\xi) \right| \leq 2$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$|R_3(x)| = \left| \frac{f^{(4)}(\xi)\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} \right| \leq \frac{2}{16 \cdot 24} = \frac{1}{8 \cdot 24}$$

$x_0 = 0$, ξ, $x = 1/2$

$$\underbrace{f^{(4)}(\xi)} = e^{\xi} \leq e^{1/2} \leq 3^{1/2} \leq \underbrace{2}$$

$$\boxed{\left| f^{(4)}(\xi) \right| \leq 2}$$