Απειροστικος Λογισμος Ι – Φθινοπωρο 2020-21

Λύσεις των ασκήσεων

---

1. (a) Για $x \ge 0$ δείξτε την ανισότητα (χρήσιμη όταν $x < 1$)

$$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x.$$

(b) Δείξτε επίσης την ανισότητα, για $x \ge 0$,

$$\cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.$$

(c) Χρησιμοποιήστε αυτές τις δύο ανισότητες για να υπολογίσετε το $\cos(0.2)$ με ακρίβεια 10^{-4}.

Λύση: (a) Έστω

$$f(x) = \cos x - -1 + \frac{x^2}{2}.$$

Πρέπει να δείξουμε $f(x) \ge 0$ για $x \ge 0$ και έχουμε $f(0) = 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x) \ge 0$ γιατί τότε η f είναι αύξουσα και άρα $f(x) \ge 0$ για $x \ge 0$.

Έχουμε

$$f'(x) \ge 0 \iff x - \sin x \ge 0$$

που είναι συνέπεια της γνωστής μας ανισότητας $\sin x \le x$.

(b) Ομοίως ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cos x$$

και παρατηρούμε ότι $g(0) = 0$, άρα αρκεί, και πάλι, να δείξουμε ότι

$$g'(x) \ge 0$$

για $x \ge 0$. Αλλά

$$g'(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x,$$

η οποία ικανοποιεί και πάλι $g'(0) = 0$, άρα και πάλι αρκεί η παράγωγος αυτής να είναι μη αρνητική, που μας οδηγεί στην ανισότητα

$$\cos x - (1 - \frac{x^2}{2}) \ge 0,$$

που είναι ακριβώς η (a).

(c) Αν θέσουμε $x = 0.2$ τότε

$$1 - \frac{x^2}{2} = 0.98$$

και

$$\frac{x^4}{4!} = 0.000066667 < 10^{-4},$$

άρα η απόσταση του $\cos(0.2)$ από το 0.98 είναι $\le 10^{-4}$.

---

2. Αποδείξτε ότι για $x > 0$ και για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$e^x \ge 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Λύση: Το αποδεικνύουμε με επαγωγή ως προς n. Για $n = 0$ έχουμε απλά την ανισότητα $e^x \ge 1$ που ισχύει για κάθε $x \ge 0$ αφού $e > 1$.

Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει η ανισότητα

$$e^x \ge 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \tag{1}$$

και δείχνουμε ότι ισχύει η ανισότητα

$$e^x \ge 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Βλέπουμε ότι ισχύει για $x = 0$ άρα αρκεί να δείξουμε ότι η παράγωγος του αριστερού μέλος μείον το δεξί είναι μη αρνητική. Παρατηρώντας ότι

$$\left(\frac{x^k}{k!}\right)' = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

βλέπουμε εύκολα ότι αυτό είναι ακριβώς η ανισότητα (1) που έχουμε υποθέσει.

---

3. Ένα ανοιχτό χαρτοκιβώτιο έχει τετράγωνη βάση πλευράς x και ύψος y. Από όλα τα χαρτοκιβώτια με σταθερή συνολική επιφάνεια (5 έδρες) ποιο έχει το μέγιστο εμβαδό;

Λύση: Η επιφάνεια είναι $S = 4xy + x^2$ και ο όγκος είναι $V = x^2y$. Θεωρούμε το y ως συνάρτηση του x.

Παραγωγίζοντας την ισότητα για την επιφάνεια παίρνουμε

$$0 = 2x + 4y + 4xy'$$

από την οποία μπορούμε να πάρουμε το y' ως συνάρτηση των x, y.

Για να μεγιστοποιηθεί ο όγκος πρέπει $V' = 0$. Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$V' = (x^2y)' = 2xy + x^2y'$$

και χρησιμοποιώντας την σχέση που πήραμε από το S αυτό γίνεται

$$V' = xy - \frac{1}{2}x^2,$$

και αν το θέσουμε αυτό ίσο με 0 βρίσκουμε $y = x/2$.

---

4. Βρείτε το σημείο της καμπύλης $y = x^2/2$ που είναι πλησιέστερα στο σημείο (6, 0).

Λύση: Το τυπικό σημείο πάνω στην καμπύλη είναι το $(x, x^2/2)$ και το τετράγωνο της απόστασης αυτού από το (6, 0) (προφανώς αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε το τετράγωνο της απόστασης) είναι η ποσότητα

$$(x-6)^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}x^4 + (x-6)^2.$$

Παραγωγίζοντας ως προς x και θέτοντας ίσο με το 0 παίρνουμε την εξίσωση

$$x^3 + 2(x-6) = 0.$$

Επειδή $(x^3+2(x-6))' = 3x^2+2 \geq 2 > 0$ το αριστερό μέλος της εξίσωσης αυτής είναι αυστηρά αύξουσα συνάρτηση, αλλά έχει το πολύ μια ρίζα. Εύκολα μαντεύει κανείς ότι αυτή η ρίζα είναι το $x = 2$ και παίρνουμε έτσι το σημείο $(2, 2)$ ως το πλησιέστερο σημείο της καμπύλης στο (6, 0).

---

5. Αν $w_1, w_2, \ldots, w_n \geq 0$ και $w_1 + \cdots + w_n = 1$ δείξτε την ανισότητα, γενίκευση της ανισότητας Αριθμητικού–Γεωμετρικού μέσου,

$$a_1^{w_1}a_2^{w_2}\cdots a_n^{w_n} \leq w_1a_1 + \cdots + w_na_n,$$

για οποιουσδήποτε αριθμούς $a_1, \ldots, a_n > 0$.

Λύση: Θέτουμε $x_i = \ln a_i$ και έτσι το αριστερό μέρος της ανισότητας γίνεται

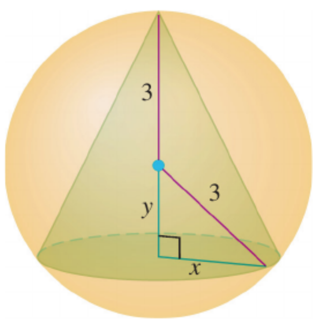
$$e^{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}.$$

Από την ανισότητα Jensen για την κυρτή συνάρτηση e^x αυτό είναι

$$\leq w_1e^{x_1} + \cdots + w_ne^{x_n} = w_1a_1 + \cdots + w_na_n.$$

---

6. Από τους κώνους που είναι εγγεγραμμένοι σε σφαίρα ακτίνας 3 ποιος έχει το μέγιστο όγκο;



Λύση: Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό του σχήματος.

Έχουμε

(2) $$x^2 + y^2 = 3.$$

Παραγωγίζοντας αυτή τη σχέση παίρνουμε

(3) $$y' = -x/y.$$

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τον όγκο του κώνου που είναι $\frac{\pi}{3}x^2(3+y)$.

Θέτουμε την παράγωγο του όγκου ίση με το 0 και, χρησιμοποιώντας την (3) και την (2), καταλήγουμε στην ισότητα

$$y^2 + 2y - 3 = 0.$$

Αυτή έχει μόνο μία θετική ρίζα, το 1, οπότε $x = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}$ και ο όγκος είναι

$$\frac{\pi}{3}x^2(3+y) = \frac{\pi}{3}8 \cdot 4 = \frac{32\pi}{3}.$$

Ο όγκος της σφαίρας είναι $\frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi$ οπότε ο μέγιστος κώνος καταλαμβάνει ποσοστό

$$\frac{32}{3 \cdot 36} = 0.296296296$$

του όγκου της σφαίρας στην οποία είναι εγγεγραμμένος.