Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς. Αν έχετε πρόβλημα να λύσετε κάποια άσκηση ζητήστε βοήθεια στο Forum του μαθήματος. Οι λύσεις θα δημοσιεύονται 1-2 βδομάδες μετά από την ανάρτηση του κάθε Φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Αν $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού k δείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor βαθμού k της f γύρω από οποιοδήποτε σημείο a είναι ίσο με την f.

2. Αν $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ βρείτε μια συνάρτηση $f(x)$ που να είναι n φορές παραγωγίσιμη στο 0 και τ.ώ.

$$f^{(i)}(0) = c_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

3. Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $|f'| \le M$ παντού δείξτε ότι δύο αθροίσματα Riemann που αντιστοιχούν στην ίδια διαμέριση του $[a, b]$ διαφέρουν το πολύ κατά $M(b-a)\Delta$, όπου Δ είναι το πλάτος της διαμέρισης (το μήκος του μεγαλύτερου από τα διαστηματάκια της διαμέρισης).

4. (a) Λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα Lipschitz με σταθερά Lipschitz το θετικό αριθμό M αν για κάθε x, y στο πεδίο ορισμού της f ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y|.$$

Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο φραγμένη από M είναι και Lipschitz με σταθερά Lipschitz αυτό το M.

(b) Δείξτε ότι η συνάρτηση x^2 δεν είναι Lipschitz αν θεωρήσουμε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ ως πεδίο ορισμού της αλλά είναι Lipschitz αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της να είναι ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$.

(c) Δείξτε ότι δε χρειάζεται μια συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη για να είναι Lipschitz.

5. Η συνάρτηση $f : [1, N] \to [0, +\infty)$ είναι φθίνουσα (N είναι φυσικός αριθμός). Ας είναι S το εμβαδό κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$ πάνω από το διάστημα $[1, N]$. Με άλλα λόγια $S = \int_1^N f(x)\,dx$.

(a) Δείξτε ότι το άθροισμα

$$U = f(1) + f(2) + \cdots + f(N-1)$$

όπως και το άθροισμα

$$L = f(2) + f(3) + \cdots + f(N)$$

είναι και τα δύο Riemann αθροίσματα για τη συνάρτηση $f(x)$ που αντιστοιχούν μάλιστα στην ίδια διαμέριση.

(b) Δείξτε

$$L \le S \le U.$$

(c) Δείξτε επίσης ότι

$$0 \le U - L \le f(1).$$