Η ακολουθία $x_n$ ορίζεται ως εξής: $x_1 = 1$ και για $n \geq 2$ ορίζουμε $x_n = \sqrt{6 + x_{n-1}}$. Υποθέστε ότι συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

$$x = \sqrt{6 + x}$$

$$\sqrt{x_n} \to \sqrt{x}$$

$$x_n = \underbrace{\sqrt{6 + x_{n-1}}}$$

$$x = \sqrt{6+x}$$

$$x^2 = 6 + x$$

Η ακολουθία $x_n$ ορίζεται ως εξής: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ και για $n \geq 2$ ορίζουμε $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$.

Βρείτε το όριο της $a_n = \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$ αφού υποθέσετε ότι συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

$$a_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \to a$$

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$$

$$\underbrace{\frac{x_n}{x_{n-1}}}_{a_n} \overbrace{\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}}^{= a_{n-1}} = \frac{x_n}{x_{n-2}} = \overbrace{\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}}^{= a_{n-1}} + 2$$

$$a_n a_{n-1} = a_{n-1} + 2$$

$$a \cdot a = a + 2 \quad \ldots$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad (x \geq -1)$$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \uparrow$$

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad \downarrow$$

# Ο αριθμός $e = 2.718\ldots$

$a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)=b_n$

$a_1 \quad a_2 \ldots \qquad \ldots \quad b_2 \quad b_1$

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\to 1$$

Αν $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ και $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ (προφανώς $a_n \le b_n$) τότε

$a_n$ γνησίως αύξουσα, $b_n$ γνησίως φθίνουσα και έχουν κοινό όριο που ονομάζουμε $e$.

$a_n$ γνησίως αύξουσα: $\quad a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$

$x \ge -1$

$$(1+x)^n \ge 1+nx$$

$n=1$ ισότητα

$n>1$ "$>$" εκτός αν $x=0$

$$a_n < a_{n+1} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\iff \frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\iff \frac{n}{n+1} < \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}.$$

Εφαρμόζουμε ανισότητα Bernoulli στον τελευταίο όρο.

$$\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} > 1-(n+1)\frac{1}{n^2+2n+1} = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$



$$(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)\frac{-1}{n^2+2n+1}$$

$$2^n + 2^n + \cdots + 2^n = (n+1)2^n \leq 2n\,2^n$$

**4.** Βρείτε το όριο της

$$0 \leftarrow a_n = \frac{1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n}{\cancel{1+3+3^2+3^3+\cdots+}3^n}.$$

$$a_n \leq \frac{2n \cdot 2^n}{3^n} = \underbrace{2n}_{\to\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0}$$

**Λύση:** Έχουμε

$$0 \leq a_n \leq \frac{(2n)2^n}{3^n}.$$

αφού $n/a^n \to 0$ αν $a > 1$ έχουμε στη συνέχεια αν επιλέξουμε κάποιο αριθμό $\beta \in (2,3)$ (π.χ. $\beta = 2.5$)

$$0 \leq a_n \leq \frac{2n}{(3/\beta)^n} \cdot \left(\frac{2}{\beta}\right)^n$$

το οποίο τείνει στο 0 αφού και οι δύο παράγοντες τείνουν στο 0. Άρα $a_n \to 0$.

$$\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$$

$$a > 1 \qquad \frac{n}{a^n} \to 0$$

$$2n\left(\frac{2}{3}\right)^n = 2\,\underbrace{\frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}}_{\to 0}$$

**5.** Δείξτε ότι $(n+1)^{1/3} - n^{1/3} \to 0$.

$$a^3 - b^3 = \underbrace{(a-b)}\underbrace{(a^2+ab+b^2)}$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \longrightarrow 0$$

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$$

**Λύση:** Εφαρμόζουμε την υπόδειξη με $a = (n+1)^{1/3}, b = n^{1/3}$ και έχουμε

$$\underbrace{(n+1)^{1/3} - n^{1/3}} = \frac{(n+1) - n}{(n+1)^{2/3} + (n+1)^{1/3}n^{1/3} + n^{2/3}} \leq \frac{1}{n^{2/3}} \to 0.$$

$$a - b = \frac{1}{\cancel{(n+1)^{2/3}} + \cancel{(n+1)^{1/3}} n^{1/3} + n^{2/3}}$$

$$\leq \frac{1}{n^{2/3}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{2/3} \longrightarrow 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

$$\wedge\!\!\backslash$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

**2.** Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(2+\frac{1}{n}\right)^4, \quad b_n = \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+2^{n+1}}, \quad c_n = \frac{1}{\frac{1}{n}+2^{-n}}, \quad d_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}.$$

$$1+a+a^2+\cdots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

$a \neq 1$

---

**Λύση:** $a_n \to 16 = 2^4$ αφού αυτό που είναι υψωμένο στην 4η δύναμη πάει στο 2.

Για την $b_n$ διαιρούμε με το μεγάλο όρο στον παρανομαστή, το $3^{n+1}$, και παίρνουμε

$$b_n = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cancel{\left(\frac{-2}{3}\right)^n}\to 0}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\to 0} \to 1/3$$

Ο αριθμητής τείνει στο 1/3 και ο παρανομαστής στο 1, άρα $b_n \to \frac{1}{3}$.

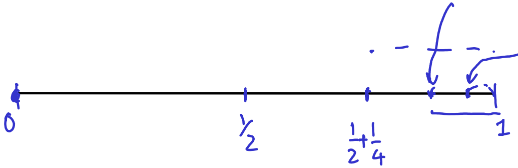
$c_n \to +\infty$ αφού ο παρανομαστής τείνει στο 0 από θετικές τιμές.

Εύκολα μπορούμε να δούμε με επαγωγή ότι $d_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, άρα $d_n \to 1$.

$$c_n = \frac{1}{\dots} \to +\infty$$

$$\dots \to 0^+$$

$$d_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}, \quad \frac{1}{2^n}\to 0$$




$$\to 1$$

$$d_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-1/2} =$$

$$1+a+a^2+\cdots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

$a=1/2$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2^n}.$$

**1.** Αποδείξτε με επαγωγή ως προς $n$ τον τύπο

(1) $$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1). \Longrightarrow 1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

**Λύση:** Πρώτα ελέγχουμε ότι ο τύπος ισχύει για $n=1$, πράγμα πολύ απλό.

Έπειτα υποθέτουμε την $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ και αποδεικνύουμε την ίδια πρόταση για $n+1$ δηλ. την ισότητα

$$1+2+3+\cdots+n+n+1=\frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Αυτό γίνεται προσθέτοντας και στα δύο μέλη της (1) το $n+1$ και κάνοντας πράξεις στο δεξί μέλος.

$n=1$ : $1=\frac{1}{2}1(1+1)$ ✓

$$\frac{1}{2}n(n+1)+n+1=(n+1)\left(\frac{1}{2}n+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

$$2S = \underbrace{n+1} + \underbrace{n+1} + \underbrace{n+1} \dots \; n+1 + \underbrace{n+1} = n(n+1)$$

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + \dots \; n^2 + \boxed{(n+1)^2} = (n+1)(n+2)(2(n+1)+1) / 6 =$$

εξαρτάται από το $n$

- $1+2+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$
- $1^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
- $(1+x)^n \geq 1+nx$

$P_n$ πρόταση για τον

$P_n \Rightarrow P_{n+1}$

$P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_4 \Rightarrow \dots$

---

$1+a+a^2+\dots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

$$1+\frac{1}{n} \to 1$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} \to \sqrt{1} = 1$$

$$\varphi(x) = \sqrt{x}$$ συνεχής

$$x_n \to x$$

$$\varphi(x_n) \to \varphi(x)$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \to 0$$

$$= \frac{\cancel{1}+\frac{1}{n}-\cancel{1}}{\cancel{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+1} \leq \frac{1/n}{1}$$

$$= \frac{1}{n} \to 0$$

$$x_n \to x$$

$$x_n^{1/5} \to x^{1/5}$$

$$x_n^{1/n} \to x^{1/n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \to e = 2.718\ldots$$

$a > 0$

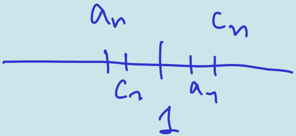
$$a^{1/n} \to 1$$

$$n^{1/n} \to 1$$

$$e = \lim_{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Αν $a_n \to 1$ και $b_n \to 2$ ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι πάντα σωστές;

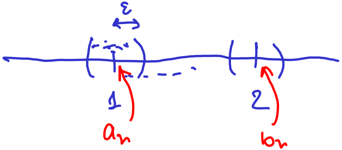
Θυμίζουμε ότι όταν λέμε ότι μια ιδιότητα Α ισχύει τελικά εννούμε ότι υπάρχει ένας δείκτης $n_0$ τ.ώ. αν $n \geq n_0$ τότε να ισχύει η ιδιότητα Α.




- [ ] 1. Τελικά $a_n \leq b_n$. ✓
- [ ] 2. Τελικά $a_n < b_n$. ✓
- [ ] 3. Τελικά $a_n \leq b_n - 1$. ✗

  $a_n \to 1$, $b_n - 1 \to 1$, $= c_n$
- [ ] 4. Τελικά $2a_n \leq b_n$. ✗

  $2a_n \to 2$, $b_n \to 2$




$\varepsilon = \frac{1}{10}$ $\quad |a_n - 1| < \frac{1}{10}$

$a_n \in \left(1 - \frac{1}{10}, 1 + \frac{1}{10}\right)$ $n \geq n_1$

$b_n \in \left(2 - \frac{1}{10}, 2 + \frac{1}{10}\right)$ $n \geq n_2$

$n \geq \boxed{\max\{n_1, n_2\}} = n_0$

Ο φυσικός αριθμός $n$ είναι άρτιος.

$(1+x)^n \geq 1+nx$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα Bernoulli για να βρούμε ένα κάτω φράγμα για την ποσότητα

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+n\frac{1}{n} = 2$$

αλλά όχι ως είναι.

Πρώτα γράφουμε

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left((1+\frac{1}{n})^2\right)^{n/2} = (1+\boxed{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}})^{n/2},$$

$x$

$$\geq 1+\frac{n}{2}\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1+1+\frac{1}{2n}$$

$$= 2+\frac{1}{2n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2+\frac{1}{2n}$$

$A \geq 3$

$\Uparrow$

$A \geq 4$ ✓

και εφαρμόζουμε την ανισότητα Bernoulli στο τελευταίο στάδιο.

Ποιο είναι το κάτω φράγμα που προκύπτει;