---

1. (a) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\sin\frac{1}{x}$ δεν είναι συνεχής στο 0, όπως και αν την ορίσουμε στο 0.

(b) Δείξτε ότι η συνάρτηση $x\sin\frac{1}{x}$ είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0, αν της δώσουμε κατάλληλη τιμή στο 0.

(c) Δείξτε ότι η συνάρτηση $x^2\sin\frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, αν της δώσουμε κατάλληλη τιμή στο 0.

Λύση: (a) Το όριο $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει: αν πάρουμε τις δύο ακολουθίες $a_n = \frac{1}{2\pi n}$ και $b_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2}$ βλέπουμε ότι η συνάρτησή μας πάνω στην a_n είναι σταθερά ίση με 0 ενώ πάνω στην b_n είναι σταθερά ίση με 1. Αφού $a_n \to 0$ και $b_n \to 0$ το όριο δεν υπάρχει, άρα η συνάρτηση δεν μπορεί να γίνει συνεχής στο 0 όπως και αν την ορίσουμε εκεί.

(b) Για $x \to 0$ έχουμε φυσικά όριο 0 αφού η συνάρτηση $\sin\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη. Αν ορίσουμε λοιπόν τη συνάρτησή μας να κάνει 0 στο 0 τότε είναι συνεχής στο 0 (μόνο αυτή η τιμή δουλεύει φυσικά). Δεν είναι όμως παραγωγίσιμη γιατί το πηλίκο διαφορών για $h \to 0$ είναι

$$\frac{h\sin\frac{1}{h} - 0}{h} = \sin\frac{1}{h}$$

που δεν έχει όριο όπως είδαμε στο (a).

(c) Το πηλίκο διαφορών τώρα είναι το

$$\frac{h^2\sin\frac{1}{h} - 0}{h} = h\sin\frac{1}{h} \to 0$$

όπως δείξαμε στο (b) άρα υπάρχει η παράγωγος στο 0 και είναι 0.

---

2. (a) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη συνάρτηση δείξτε ότι η $g(x) = x^2 f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

(b) Βρείτε μια συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που να είναι παραγωγίσιμη μόνο στο 0.

Για το (b) χρησιμοποιήστε το (a) και τη συνάρτηση του Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ που ισούται με 1 αν $x \in \mathbb{Q}$ (ρητός) και με 0 αν $x \notin \mathbb{Q}$ (άρρητος).

Λύση: (a) Το πηλίκο διαφορών είναι

$$\frac{1}{h}(g(h) - g(0)) = \frac{1}{h}(h^2 f(h) - 0) = hf(h) \to 0$$

αφού η f είναι φραγμένη.

(b) Πάρτε τη συνάρτηση $h(x) = x^2\chi_{\mathbb{Q}}(x)$. Είναι παραγωγίσιμη στο 0 σύμφωνα με το (a). Σε οποιονδήποτε άλλο πραγματικό αριθμό x η συνάρτηση δεν είναι καν συνεχής, άρα ούτε και παραγωγίσιμη. Πράγματα αν q_n είναι μια ακολουθία ρητών που τείνει στο x και a_n μια ακολουθία αρρήτων που τείνει στο x τότε τα όρια $h(q_n)$ και $h(a_n)$ είναι $x^2 \neq 0$ και 0 αντίστοιχα, άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο x.

---

3. Βρείτε ένα τύπο για την παράγωγο του γινομένου τριών συναρτήσεων $(f\cdot g\cdot h)'$.

Λύση: Αν εφαρμόσουμε τον τύπο για την παράγωγο γινομένου δύο φορές παίρνουμε:

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

---

4. Βρείτε ένα τύπο για την παράγωγο της σύνθεσης τριών συναρτήσεων $f(g(h(x)))$.

Λύση: Εφαρμόζουμε δύο φορές τον κανόνα της αλυσίδας και παίρνουμε

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x).$$

---

5. Δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες που μεταβάλλονται με το χρόνο με τρόπο ώστε ο μεταξύ τους δακτύλιος να έχει πάντα εμβαδό ίσο με 9π. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του μεγαλύτερου κύκλου είναι σταθερός και ίσος με 10π. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του μήκους της περιφέρειας του μικρού κύκλου όταν αυτός έχει εμβαδό ίσο με 16π;

Λύση: Ας είναι $r(t)$ και $R(t)$ οι ακτίνες του μικρού και του μεγάλου κύκλου τη χρονική στιγμή t. Μας δίδεται ότι

$$(\pi R^2)' = 10\pi.$$

Επίσης ότι

$$\pi R^2 - \pi r^2 = 9\pi,$$

από το οποίο και το προηγούμενο έπεται με παραγώγιση ότι

$$10\pi = (\pi r^2)' = 2\pi r' r,$$

άρα

$$(2\pi r)' = \frac{10\pi}{r}.$$

Από το ότι $\pi r^2 = 16\pi$ έπεται $r = 4$ άρα παίρνουμε τελικά $(2\pi r)' = \frac{5}{2}\pi$.

---

6. Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ στο σημείο (x_0, y_0);

Λύση: Παραγωγίζουμε ως προς x την εξίσωση της έλλειψης και παίρνουμε

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} y' = 0.$$

Λύνουμε ως προς y' και βρίσκουμε

$$y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

Στο σημείο (x_0, y_0) η εφαπτόμενή μας ευθεία έχει συνεπώς την εξίσωση

$$y = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) + y_0.$$

---

7. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a και $f(a) \neq 0$ δείξτε ότι και η $|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο a.

Λύση: Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο a είναι αναγκαστικά και συνεχής εκεί, άρα υπάρχει ένα διάστημα $(a - \epsilon, e + \epsilon)$ στο οποίο η f θα έχει σταθερό πρόσημο. Σε αυτό το διάστημα η $|f|$ ισούται με την f ή ισούται με την $-f$. Σε κάθε περίπτωση θα είναι παραγωγίσιμη στο a.

---

8. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν συναρτήσεις f, g, παραγωγίσιμες στο 0 και με $f(0) = g(0) = 0$ τέτοιες ώστε

$$x = f(x)g(x)$$

για $x \in [-1, 1]$.

Λύση: Αν υπήρχαν θα μπορούσαμε να παραγωγίσουμε τη σχέση $fg = x$ και θα παίρναμε $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 1$ που δεν ισχύει για $x = 0$.

---

9. Έστω $a > 1$ και $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x^a}$ (ορίζουμε $f(0) = 0$). Δείξτε ότι υπάρχει παντού η f' και είναι συνεχής παντού εκτός από το 0.

Λύση: Αν $x \neq 0$ είναι φανερό ότι υπάρχει η παράγωγος στο x και ισούται με

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x^a} + x^2(-a)\frac{1}{x^{a+1}}\cos\frac{1}{x^a} = 2x \sin\frac{1}{x^a} - a\frac{1}{x^{a-1}}\cos\frac{1}{x^a},$$

που είναι προφανώς συνεχής συνάρτηση αν $x \neq 0$. Από το Πρόβλημα 2(a) παίρνουμε ότι και στο 0 υπάρχει η παράγωγος και μάλιστα ισούται με το 0.

Αλλά το όριο $\lim_{x\to 0} f'(x)$ δεν υπάρχει. Το όριο του πρώτου προσθετέου είναι 0 αλλά το όριο του δεύτερου προσθετέου δεν υπάρχει αφού ο παράγοντας x^{1-a} απειρίζεται και το συνημίτονο, που εναλλάσσεται άπειρες φορές από το -1 στο 1 όταν $x \to 0$ κάνει το όριο να μην είναι καν $\pm\infty$.

Άρα η παράγωγος δεν είναι συνεχής στο 0.