

**ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2019-20**  
**ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 1**

**Πρόβλημα 1.** Έστω  $K \leq E$  επέκταση σωμάτων και έστω  $a \in E$ . Αποδείξαμε στο μάθημα ότι αν το  $a$  είναι αλγεβρικό στοιχείο  $/K$  τότε  $K(a) = K[a]$ . Δείξτε ότι ισχύει και το αντίστροφο: αν  $K(a) = K[a]$  τότε το  $a$  είναι αλγεβρικό στοιχείο  $/K$ .

**Πρόβλημα 2.** α) Δείξτε ότι  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ .  
β) Βρείτε τον βαθμό τής επέκτασης  $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$ .

**Πρόβλημα 3.** α) Δείξτε ότι το πολυώνυμο  $x^3 + 2x + 2$  είναι ανάγωγο πολυώνυμο τού  $\mathbb{Q}[x]$ .  
β) Ως πολυώνυμο περιτού βαθμού έχει μια πραγματική ρίζα, έστω  $a$ . Εκφράστε το  $\frac{1}{1-a}$  ως στοιχείο τού  $\mathbb{Q}[a]$ .

**Πρόβλημα 4.** Βρείτε τον βαθμό επέκτασης  $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) : \mathbb{Q}]$ .

**Πρόβλημα 5.** Έστω  $K \leq E$  επέκταση σωμάτων και  $a \in E$  αλγεβρικό στοιχείο πάνω από το  $K$ . Υποθέτουμε ότι το  $\text{Irr}(a, K)$  είναι περιτού βαθμού. Δείξτε ότι  $K(a) = K(a^2)$ . Ισχύει το ίδιο όταν ο βαθμός είναι άρτιος;

**Πρόβλημα 6.** Έστω  $K \leq E$  μια αλγεβρική επέκταση σωμάτων. Δείξτε ότι κάθε υποδακτύλιος τού  $E$  που περιέχει το  $K$  είναι σώμα. Ισχύει το ίδιο αν η επέκταση δεν είναι αλγεβρική;

**Πρόβλημα 7.** Δείξτε ότι αν  $[E : F] = p$ ,  $p = \text{πρώτος}$ , τότε  $E = F(a)$ , για κάποιο  $a \in E$ .