

Ανάλυση II (Τμήμα Β)

Πρόοδος 2019

Διάρκεια 1 ώρα και 45 λεπτά. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα. Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.¹ Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(1) (2 μονάδες) Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις συναρτήσεις

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

στα διαστήματα $(0, 1]$ και $[1, +\infty)$.

(2) (2 μονάδες) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(\sqrt{n+2}) + f(\sqrt{n}) - 2f(\sqrt{n+1})) = 0.$$

Ισχύει το ίδιο αν η f είναι απλά συνεχής στο \mathbb{R} ;

(3) (3 μονάδες) (i) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right] & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

(ii) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *Riemann*-ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $f(r) = r$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$. Υπολογίστε (με αιτιολόγηση) το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) dx$.

(4) (2 μονάδες) Βρείτε όλες τις *Riemann*-ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και

$$(f(x))^2 = 2 \int_0^x f(t) dt$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

(5) (2 μονάδες) Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) dx.$$

¹Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ' ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.