

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ'ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.



Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

100 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ – ΑΝΑΛΥΣΗ II
Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

Σε κάθε μια από τις παρακάτω ερωτήσεις θα πρέπει να πείτε ποιες από τις δύο προτάσεις που δίνονται είναι σωστές.

1(i) Η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, με ακτίνα σύγκλισης R , συγκλίνει για κάθε x στο διάστημα $(-R, R)$. (ii) Στο διάστημα σύγκλισής της η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n$ ισούται με τη συνάρτηση $\frac{2}{1-2x}$.

A: Καμία. B: Και οι δύο. C: Μόνο η 1η. D: Μόνο η 2η.

2(i) Στο μετρικό χώρο \mathbb{R} με τη συνηθισμένη μετρική το σύνολο $[0, 1)$ είναι κλειστό. (ii) Στο μετρικό χώρο \mathbb{R} με τη συνηθισμένη μετρική το σύνολο $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\}$ είναι κλειστό.

A: Μόνο η 1η. B: Καμία. C: Και οι δύο. D: Μόνο η 2η.

3(i) Η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, για $x \in A$, συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(x)$ αν η ακολουθία συναρτήσεων $\sum_{k=1}^n f_k(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$ για $x \in A$ και για $n \rightarrow \infty$. (ii) Αν $f_n(x) = x^n$ τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f(x)$ για $x \in (-9/10, 11/12]$.

A: Μόνο η 1η. B: Και οι δύο. C: Καμία. D: Μόνο η 2η.

4(i) Η $\cos(x^2)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο \mathbb{R} . (ii) Η $|\cos(x)|$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο \mathbb{R} .

A: Μόνο η 1η. B: Και οι δύο. C: Καμία. D: Μόνο η 2η.

5(i) Αν $x_n \in \mathbb{R}$ είναι μια ακολουθία με $x_{2n} \in \mathbb{Q}$ και $x_{2n+1} \notin \mathbb{Q}$ για κάθε n τότε η x_n δε συγκλίνει. (ii) Αν κάποιο διάστημα θετικού μήκους περιέχει άπειρα στοιχεία του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε κάθε υποδιάστημα αυτού περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A .

A: Μόνο η 2η. B: Μόνο η 1η. C: Και οι δύο. D: Καμία.

6(i) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$. (ii) Αν η σειρά θετικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$.

A: Μόνο η 1η. B: Και οι δύο. C: Καμία. D: Μόνο η 2η.

7(i) Σε ένα μετρικό χώρο αν μια ακολουθία συγκλίνει τότε είναι φραγμένη. (ii) Στο μετρικό χώρο \mathbb{R} με τη συνηθισμένη μετρική το σύνολο του συνόλου $[0, 1) \cup [1, 2)$ είναι το $\{0, 2\}$.

A: Και οι δύο. B: Καμία. C: Μόνο η 2η. D: Μόνο η 1η.

8(i) Αν $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων, $E = F \cup G$, $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο F και $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο G , τότε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο E . (ii) Η $f_n(x) = \frac{x}{n}$ συγκλίνει στην $f(x) = 0$ ομοιόμορφα για $x \in [0, 1)$.

A: Μόνο η 1η. B: Μόνο η 2η. C: Καμία. D: Και οι δύο.

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδες) Στο μετρικό χώρο $C([0, 1])$ με την ομοιόμορφη μετρική $\rho(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$ δείξτε ότι το σύνολο των συναρτήσεων της μορφής $g(x) = ax + b$, με $a, b \in \mathbb{R}$, είναι κλειστό.

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδες) Σε ένα μετρικό χώρο X τα σύνολα G_1, \dots, G_{10} είναι ανοιχτά. Δείξτε ότι το σύνολο

$$G = \{x \in X : x \in G_1, x \in G_2, \dots, x \in G_{10}\}$$

είναι επίσης ανοιχτό.

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέψετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • Συνολικός αριθμός μονάδων 10. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ'ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινήτου (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.



Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

101 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ – ΑΝΑΛΥΣΗ II
Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

Σε κάθε μια από τις παρακάτω ερωτήσεις θα πρέπει να πείτε ποιες από τις δύο προτάσεις που δίνονται είναι σωστές.

1 (i) Η $\cos(x^2)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο \mathbb{R} . (ii) Η $|\cos(x)|$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο \mathbb{R} .
A: Καμία. B: Μόνο η 2η. C: Και οι δύο. D: Μόνο η 1η.

2 (i) Η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, με ακτίνα σύγκλισης R , συγκλίνει για κάθε x στο διάστημα $(-R, R)$. (ii) Στο διάστημα σύγκλισής της η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n$ ισούται με τη συνάρτηση $\frac{2}{1-2x}$.
A: Μόνο η 1η. B: Καμία. C: Μόνο η 2η. D: Και οι δύο.

3 (i) Στο μετρικό χώρο \mathbb{R} με τη συνηθισμένη μετρική το σύνολο $[0, 1)$ είναι ανοιχτό. (ii) Στο μετρικό χώρο \mathbb{R} με τη συνηθισμένη μετρική το σύνολο $\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\}$ είναι κλειστό.
A: Μόνο η 1η. B: Μόνο η 2η. C: Καμία. D: Και οι δύο.

4 (i) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$. (ii) Αν η σειρά θετικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$.
A: Μόνο η 2η. B: Καμία. C: Και οι δύο. D: Μόνο η 1η.

5 (i) Αν $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων, $F \subseteq E$, και $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο E , τότε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο F . (ii) Αν $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων, και $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο E , τότε η f είναι φραγμένη.
A: Μόνο η 2η. B: Και οι δύο. C: Καμία. D: Μόνο η 1η.

6 (i) Η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, για $x \in A$, συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(x)$ αν η ακολουθία συναρτήσεων $\sum_{k=1}^n f_k(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$ για $x \in A$ και για $n \rightarrow \infty$. (ii) Αν $f_n(x) = x^n$ τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f(x)$ για $x \in (-9/10, 11/12]$.
A: Και οι δύο. B: Καμία. C: Μόνο η 2η. D: Μόνο η 1η.

7 (i) Σε ένα μετρικό χώρο αν μια ακολουθία συγκλίνει τότε είναι φραγμένη. (ii) Στο μετρικό χώρο \mathbb{R} με τη συνηθισμένη μετρική το σύνολο του συνόλου $[0, 1) \cup [1, 2)$ είναι το $\{0, 2\}$.
A: Καμία. B: Και οι δύο. C: Μόνο η 2η. D: Μόνο η 1η.

8 (i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ συγκλίνει. (ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ συγκλίνει.
A: Και οι δύο. B: Μόνο η 1η. C: Μόνο η 2η. D: Καμία.

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδες) Αποδείξτε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία, σε ένα μετρικό χώρο X , είναι φραγμένη.

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδες) Βρείτε όλα τα ανοιχτά σύνολα στο μετρικό χώρο \mathbb{Z} (ακέραιοι) με τη συνηθισμένη μετρική $d(x, y) = |x - y|$.

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφεται το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • Συνολικός αριθμός μονάδων 10. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!