Θεμέλια των Μαθηματικών - Εαρινό Εξάμηνο 2017-18,
Διδάσκοντες: Ι. Αντωνιάδης, Α. Κουβιδάκης
Φυλλάδιο 1

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος. Δώστε απόδειξη αν είναι σωστές ή αντιπαράδειγμα αν είναι λάθος.
   1) Αν A, B, C είναι σύνολα με $A \in B$ και $B \subseteq C$ τότε $A \in C$.
   2) Αν A, B, C είναι σύνολα με $A \in B$ και $B \subseteq C$ τότε $A \subseteq C$.
   3) Αν A, B, C είναι σύνολα με $A \subseteq B$ και $B \in C$ τότε $A \subseteq C$.
   4) Αν A, B, C είναι σύνολα με $A \in B$ και $B \in C$ τότε $A \in C$.

2. Σχεδιάστε τα διαγράμματα Venn στις ακόλουθες περιπτώσεις:
   1) Έχουμε δύο σύνολα A, B με $(A \cup B) \subseteq B$ και $B \nsubseteq A$.
   2) Έχουμε τρία σύνολα A, B, C με $A \cap B \cap C = \emptyset$, $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ και $B \cap C \neq \emptyset$.

3. Υπολογίστε $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ και $B \setminus A$ αν:
   1) $A = [2, 4]$ και $B = (1, 3]$. Αν $C = [0, 5)$ βρείτε επίσης το $(A \cap C) \cup B$
   2) $A = \{a, f, X\}$ και $B = \{1, f, \emptyset, \{a\}\}$.

4. Αποδείξτε τις παρακάτω ισότητες αναφέροντας σε κάθε βήμα ποιες ταυτότητες από θ. Συνόλων χρησιμοποιείτε. Τα σύνολα A, B θεωρούνται υποσύνολα του χώρου Ω.

$$\begin{aligned}
B \cup (\emptyset \cap A) &= B \\
(A^c \cap \Omega)^c &= A \\
(A \cap B) \cup (A \cap B^c) &= A \\
(A \cap B) \cup (A \cup B^c)^c &= B \\
((A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c))^c &= A \\
A \cap (A \cup B) &= A
\end{aligned}$$

5. Αν

$$\begin{aligned}
G &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2m \text{ για κάποιο } m \in \mathbb{Z}\} \\
H &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 3m \text{ για κάποιο } m \in \mathbb{Z}\} \\
I &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 \text{ περιττός}\} \\
J &= \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq n \leq 10\}
\end{aligned}$$

   Βρείτε τα σύνολα $G \cup I$, $G \cap I$, $G \cap H$, $J \setminus G$, $I \setminus H$, $J \cap (G \setminus H)$.

6. Αποδείξτε ότι $A \cap B = \emptyset$ αν και μόνο αν $A^c \cap B = B$.

7. Κάνοντας χρήση της ισότητας $A \setminus B = A \cap B^c$, αποδείξτε ότι

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C).$$

8. Υπολογίστε τα σύνολα $A \triangle A, A \triangle \emptyset$. Δείξτε τις επόμενες ιδιότητες της συμμετρικής διαφοράς συνόλων.
   1) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
   2) $A \triangle B = B \triangle A$
   3) $(A \triangle B) \triangle A = B$
   4) Με χρήση του 3) δείξτε ότι αν $A \triangle B = A \triangle C$ τότε $B = C$.

9. Υπολογίστε το δυναμοσύνολο των συνόλων $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ και $B = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$

10. Αν A, B σύνολα δείξτε τα ακόλουθα για τα δυναμοσύνολά τους
   1) $\mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B) = \mathfrak{P}(A \cap B)$
   2) $\mathfrak{P}(A) \cup \mathfrak{P}(B) \subseteq \mathfrak{P}(A \cup B)$
   3) $\cap_{X \in \mathfrak{P}(A)} X = \emptyset$
   4) $A = \cup_{X \in \mathfrak{P}(A)} X$

11. Βρείτε:
   1) άπειρη ακολουθία κλειστών διαστημάτων που η τομή τους να είναι το $[2, 3]$
   2) την τομή $\cap_{\epsilon \in \mathbb{R}^+} (0, \epsilon)$.

12. Αν $A_k = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq k \text{ και } n \leq 2k\}$ για κάθε $k = 1, 2, 3, \ldots$, βρείτε $\cap_k A_k$ και $\cup_k A_k$.

13. Για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε $A_n = [0, 1 - 2^{-n}]$ και $B_n = [0, 1 - 3^{-n}]$. Δείξτε ότι κάθε A_n είναι γνήσιο υποσύνολο του B_n αλλά $\cup_n A_n = \cup_n B_n$.